

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Siebenundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit drei Figurentafeln.

Berlin, 1884.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des siebenundneunzigsten Bandes.

Druckfehler in Band 96.

S. 213, Zeile 3 von oben ist $\varphi(x)$ nach „und“ zu setzen.

„ 279, „ 9 und 10 von unten ist r_3 statt ν_3 „ „

Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum.

(Hierzu Figurentafel I, Fig. 1—4.)

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

1. Ich will im Folgenden für die beiden Sätze:

„Unter allen vierseitigen Prismen hat bei gegebener Oberfläche der Würfel das grösste Volumen und bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche“
und:

„Unter allen Tetraedern hat bei gegebener Oberfläche das reguläre das grösste Volumen und bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche“
einen völlig exacten geometrischen Beweis geben.

Steiner hat sich in 𝔅 *) Nr. 30, 47 I mit diesen Sätzen beschäftigt; aber die dort gegebenen Beweise sind, meines Erachtens, von derselben Art, wie der Beweis 𝔄 Nr. 5 I des Satzes vom gleichseitigen Dreiecke, von welchem *Steiner* selbst sagt, es sei gegen die Richtigkeit und Strenge desselben nichts einzuwenden, er habe aber doch in der Beziehung etwas Unbefriedigendes, dass, wenn ein gleichseitiges und ein beliebiges Dreieck von gleichem Umfange gegeben sind, durch ihn nicht direct gezeigt wird, dass ersteres in der That den grösseren Inhalt hat. *Steiner* hat für diesen Satz einen völlig befriedigenden Beweis in 𝔄 Nr. 5 II gegeben; am Ende dieses Aufsatzes will ich noch eine Vereinfachung desselben besprechen.

2. Es sei also zuerst *ein beliebiges vierseitiges Prisma von gegebener Oberfläche O* vorgelegt; so werde es, mit Beibehaltung der Grundfläche der Grösse und Gestalt nach und der Mantelfläche (*Steiner*s „Seitenfläche“) der

---

*) Unter 𝔄, 𝔅 verstehe ich auch hier, wie in meinem Aufsatze dieses Journal Bd. 96 S. 36, die beiden grossen Abhandlungen *Steiners*, welche in diesem Journale Bd. 24 S. 93 und S. 187 (die erstere auch im *Liouville*schen Journale 1. Ser. Bd. 6 S. 105) erschienen sind und nun im zweiten Bande der gesammelten Werke *Steiners* S. 177, 243 stehen.

Grösse nach, in ein gerades verwandelt; das Volumen ist nach 𝔅 Nr. 28 grösser geworden. Bei dem nun erhaltenen geraden Prisma werde die Grundfläche, unter Beibehaltung ihres Inhalts, in ein Quadrat verwandelt; bleibt die Höhe und also auch das Volumen unverändert, so wird nach 𝔄 Nr. 25 II der Umfang der Grundfläche und demnach auch die Mantel- und die Oberfläche verkleinert. Vergrössert man nun die Höhe, bis die alte Oberfläche wieder erreicht ist, so wird das Volumen vergrössert. So weit nach *Steiner*, der damit die Frage auf die Betrachtung *gerader quadratischer Parallelepipeden* *) zurückgeführt hat.

Ein derartiges Parallelepipedon oder allgemeiner *ein gerades rechteckiges* will ich nun, unter Beibehaltung der Oberfläche, in ein solches transformiren, bei dem *jede von zwei Gegenflächen gleich einem Sechstel der Oberfläche ist,* und dieses dann, indem eine dieser Flächen als Grundfläche gewählt wird, unter Beibehaltung des Inhalts derselben und der Mantelfläche, in ein quadratisches umwandeln, welches dann nothwendig ein Würfel ist.

Dieses Constructionsverfahren, durch welches *einer Grösse der Werth verschafft wird, den sie bei der Maximums- oder Minimumsfigur haben soll,* hat *Steiner* wohl bei dem Satze vom gleichseitigen Dreiecke, aber, so viel ich mich erinnere, sonst nicht mehr benutzt, wenigstens nirgends seine Bedeutung hervorgehoben. Ich lege Werth auf dasselbe und werde, wie ich es auch schon im Beweise in § 13 meines Aufsatzes in diesem Journal Bd. 96, S. 36 gethan habe, es möglichst anwenden.

3. Schicken wir nun dazu den folgenden planimetrischen Hilfssatz voraus:

Wenn bei constantem Inhalte die Differenz der Seiten eines Rechtecks sich vermindert, so thut es auch die Summe der Seiten, aber in geringerem Masse; d. h. das Verhältniss der neuen Summe zur alten ist näher an 1, als das der neuen Differenz zur alten, mithin grösser.

Es sei demnach vorausgesetzt:

$$ab = a'b';\ a > b,\ a' > b,\ a' > a;$$

also:

$$a' > a > b > b' \quad \text{und} \quad a-b < a'-b';$$

und es wird behauptet:

$$a+b < a'+b' \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{a'+b'} > \frac{a-b}{a'-b'}.$$

---

*) Es wäre zu wünschen, dass statt dieses schwerfälligen Wortes das *Grassmann*sche „Spat“ Aufnahme finden möchte.

Suchen wir dies geometrisch zu beweisen. Wir machen (Fig. 1) auf einer Geraden nach derselben Seite hin $AB = a$, $AB' = a'$, senkrecht dazu $AD = b$, $AD' = b'$, vervollständigen die beiden Rechtecke $ABCD$, $AB'C'D'$, welche n. V. gleich sind. Es sei noch $E = (BC, D'C')$, $F = (B'C', DC)$, $L = (CC', ABB')$. Bekanntlich liegen A, E, F in gerader Linie und $DCED' = BEC'B'$; weil nun $DC > BE$, so ist $EC' > EC$ und $\angle C'CE > \frac{1}{2}$R. Zieht man aus C und C' unter einem halben Rechten gegen ABB' je nach beiden Seiten CG, CH, $C'G'$, $C'H'$, so dass $AG = a-b$, $AG' = a'-b'$, $AH = a+b$, $AH' = a'+b'$; so sind (weil eben $C'CE > \frac{1}{2}$R) H, H' beide diesseits L gelegen und von ihnen deshalb wieder H näher an A als H', also $a+b < a'+b'$. Schneiden wir dieselben vier Linien mit AEF in J, K, J', K', so liegen, weil CG, $C'G$ in Aussenwinkeln des Rechtecks $CEC'F$ gezogen sind, J, J' ausserhalb EF und zwar jener zwischen A und E, dieser jenseits F; K und K' aber auf EF selbst; mithin ist $AJ < AK$, $AJ' > AK'$ und $\frac{AJ}{AJ'} < \frac{AK}{AK'}$ und also auch: $\frac{AG}{AG'} < \frac{AH}{AH'}$ oder $\frac{a-b}{a'-b'} < \frac{a+b}{a'+b'}$.

4. Verkleinert man demnach bei einem geraden rechteckigen Parallelepipedon die Differenz der Seiten der Grundfläche, indem der Inhalt derselben und die Höhe des Körpers noch festgehalten werden, so nimmt die Summe der beiden ungleichen Seitenflächen, folglich auch Mantel- und Oberfläche ab; vergrössert man die Höhe so, dass die alte Mantel- und Oberfläche wieder erreicht wird, so hat das Volumen zugenommen, aber die Differenz der ungleichen Seitenflächen α, β doch abgenommen; denn, da $\frac{a-b}{a'-b'} < \frac{a+b}{a'+b'}$ und $(a+b)h = (a'+b')h'$, so ist $(a-b)h < (a'-b')h'$ oder $\alpha-\beta < \alpha'-\beta'$; mit abnehmendem $a-b$ nimmt auch $\alpha-\beta$ ab und beide erreichen gleichzeitig den Werth 0. Aus $\alpha-\beta < \alpha'-\beta'$ und $\alpha+\beta = \alpha'+\beta'$ folgt $\alpha < \alpha'$, $\beta > \beta'$.

Wenn also, unter Beibehaltung der Inhalte der Grundfläche und der Mantelfläche eines geraden rechteckigen Parallelepipedons, die erstere dem Quadrate genähert wird, so nimmt das Volumen und die kleinere Seitenfläche zu, die grössere hingegen ab.

Es liege nun ein gerades rechteckiges Parallelepipedon mit gegebener Oberfläche O vor, bei welchem wenigstens die grösste α und die kleinste β der drei Flächen noch nicht gleich sind*); so ist $\alpha > \frac{1}{6}O$,

*) Da wir es eigentlich schon mit einem quadratischen zu thun haben, so ist die mittlere einer der beiden andern gleich.

$\beta < \frac{1}{6}O$. Wir nehmen die mittlere γ als Grundfläche und nähern sie, unter den eben beschriebenen Bedingungen, dem Quadrate; α nimmt ab, β zu und zwar um gleich viel: wir gehen bis zu dem Momente, wo diejenige von diesen beiden Flächen, die ursprünglich der Grösse $\frac{1}{6}O$ näher war, diese Grösse erreicht.

Das nun erhaltene Parallelepiped, das grösseres Volumen hat, als das gegebene, verwandeln wir, indem wir diejenige seiner Flächen, welche gleich $\frac{1}{6}O$ ist, zur Grundfläche wählen, unter den nämlichen Bedingungen, in eins mit quadratischer Grundfläche. Das Volumen hat sich vergrössert, die Oberfläche ist geblieben, die beiden Seitenflächen sind gleich, also jede gleich $\frac{1}{6}O$; da nun Grundfläche und Seitenfläche gleiche Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite sind, so ist auch die Seitenfläche ein Quadrat. *Der Würfel ist erreicht,* und wir haben das ursprüngliche vierseitige Prisma durch *vier* Transformationen, von denen jede die Oberfläche unverändert liess, das Volumen aber vergrösserte, in den Würfel übergeführt.

5. Der zweite Theil des „Würfelsatzes" ergiebt sich so. Es sei wieder ein beliebiges vierseitiges Prisma mit dem Volumen V, der Oberfläche O gegeben. Ein Würfel habe das Volumen V, die Oberfläche O', so haben wir zu zeigen, dass $O' < O$.

Wir nehmen noch einen zweiten Würfel, der die Oberfläche O, das Volumen V'' habe, so ist wegen des vorigen Satzes $V'' > V$; folglich gilt dasselbe auch für die Oberflächen der beiden Würfel: $O > O'$.

6. In 𝔅 Nr. 52 I leitet *Steiner* aus dem Würfelsatze den folgenden ab:

Falls die Mantelfläche einer dreiseitigen Pyramide gegeben ist, so ist das Volumen ein Maximum, wenn die drei Seitenflächen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit dem rechten Winkel an der Spitze sind und also die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, in dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Pyramidenhöhe sich befindet; und umgekehrt, wenn das Volumen gegeben, so hat von allen dreiseitigen Pyramiden die genannte die kleinste Mantelfläche.

Steiner vervollständigt die Pyramide zu einem vierseitigen Prisma, welches die Ecke an der Spitze und ihre drei Kanten mit ihr gemein hat.

Bei der Pyramide des grössten Volumens, bez. der kleinsten Mantelfläche hat die Höhe zum Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises das Verhältniss $\sqrt{2}$. Hieraus zieht *Steiner* weiter in Nr. 53 I eine allgemeinere Folgerung, zu der er keinen Beweis fügt, die er sich aber

jedenfalls analog zu 𝔅 Nr. 32 I bewiesen denkt; ich will nur den für das Folgende wichtigen Specialfall erwähnen:

Von allen vierseitigen Pyramiden mit quadratischer Grundfläche, in deren Mittelpunkt die Höhe ihren Fusspunkt hat, besitzt bei gegebenem Volumen diejenige die kleinste Mantelfläche, bei welcher die Höhe zur Seite des Grundquadrats in dem Verhältniss $1:\sqrt{2}$ *steht oder gleich der halben Diagonale desselben ist (halbes reguläres Oktaeder).*

7. Ehe ich zum Beweise des auf das Tetraeder bezüglichen Satzes übergehe, muss ich noch den Hilfssatz von *Steiner* 𝔅 No. 42 besprechen, der sich auf rechtwinklige Dreiecke bezieht und von *Steiner* für den Beweis einiger Pyramidensätze gebraucht wird.

Ich finde zunächst, dass *Steiner* ihn doch nicht allgemein genug ausgesprochen hat. Er spricht nur von der Summe der zweiten Katheten, während es auch die Differenz sein kann oder, bei mehr als zwei Dreiecken, irgend eine algebraische Summe. In dieser allgemeineren Form ist er, meines Erachtens, für die aus ihm gezogenen Folgerungen (Nr. 43, 44) nothwendig. Beim Uebergange ferner von zwei zu mehr Dreiecken sagt *Steiner:* „der Satz ist unmittelbar auszudehnen“; der Uebergang erscheint mir nicht so unmittelbar, ich erlaube mir, meine Art ihn zu behandeln hier mitzutheilen. Dieser Hilfssatz muss also zuerst in folgende Fassung gebracht werden:

Von mehreren rechtwinkligen Dreiecken seien die einen Katheten $a_1, a_2, \ldots$ *einzeln gegeben, für die anderen* $b_1, b_2, \ldots$ *sei vorgeschrieben, dass irgend eine der algebraischen Summen*

$$\pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \cdots$$

gleich der gegebenen (positiven) Grösse β *sei; dann ist die arithmetische Summe der Hypotenusen* $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$ *am kleinsten, wenn die Katheten* $b_1, b_2, \ldots$ *den* $a_1, a_2, \ldots$ *proportional sind und* β *zur arithmetischen Summe haben.*

Es liege zunächst ein Fall vor, dass nicht die arithmetische Summe der $b_1, b_2, \ldots$, sondern eine andere gleich β sei. Weil $\beta > 0$, so muss zu jedem mit $-$ behafteten b entweder schon ein grösseres, das mit $+$ behaftet ist, oder wenigstens ein Aggregat solcher gefunden werden können, deren Summe grösser ist. In einer Differenz $b_i - b_k$ wollen wir beide b um dieselbe Grösse verringern, so dass $b'_i - b'_k$ entsteht; dann ist, weil a_i, a_k fest bleiben und $b'_i < b_i$, $b'_k < b_k$, auch $c'_i < c_i$, $c'_k < c_k$, also $c'_i + c'_k < c_i + c_k$. Lassen

wir daher die übrigen b und demnach auch die zugehörigen c unverändert, so wird durch jede solche Veränderung die Hypotenusensumme verkleinert.

Ist $b_k < b_i$, so nehmen wir am einfachsten $b'_k = 0$, $b'_i = b_i - b_k$ und sind ein negatives Glied los geworden. So schaffen wir successive alle negativen Glieder weg, zu denen (in der je veränderten Summe) ein absolut grösseres positives zu finden ist. Sollte dann — vielleicht nach i Umwandlungen — ein Zustand eintreten, wo es keine solche negativen b mehr giebt, wo z. B. das Aggregat $b_1^{(i)} + b_2^{(i)} + b_3^{(i)} - b_4^{(i)}$ vorkommt und $b_4^{(i)}$ erst durch $b_1^{(i)} + b_2^{(i)} + b_3^{(i)}$ übertroffen wird, so operiren wir successive, wie folgt:

$$b_1^{(i)} + b_2^{(i)} + 0 - (b_4^{(i)} - b_3^{(i)}) + \cdots,$$
$$b_1^{(i)} + 0 + 0 - (b_4^{(i)} - b_3^{(i)} - b_2^{(i)}) + \cdots,$$
$$(b_1^{(i)} + b_2^{(i)} + b_3^{(i)} - b_4^{(i)}) + 0 + 0 + 0 + \cdots, \text{ u. s. f.}$$

und gelangen schliesslich zu einer arithmetischen Summe von b (die im Allgemeinen auch Nullen enthält); und da bei jeder Differenzenumwandlung die Hypotenusensumme abgenommen hat, so können wir für jede algebraische Summe der b (auf verschiedene Weisen) eine arithmetische angeben, zu welcher eine kleinere Hypotenusensumme gehört.

Im Folgenden brauchen wir den allgemeineren Fall, dass auch algebraische Summen in Betracht zu ziehen sind, nur für zwei Dreiecke (Nr. 10); da ist natürlich der vorhergehende Beweis wesentlich einfacher.

Wir können uns also auf die Betrachtung arithmetischer Summen der b beschränken — den Fall, den *Steiner* allein berücksichtigt hat, indem er das Vorhergehende für selbstverständlich gehalten zu haben scheint.

Wofern es sich bloss um zwei Dreiecke handelt, errichtet man, nach *Steiner*s einfachem Beweise, auf $C_1C_2 = \beta$ in C_1, C_2 (aber wohl besser nach verschiedenen Seiten) $C_1B_1 = a_1$, $C_2B_2 = a_2$ normal und erkennt sofort, dass B_1B_2 in C_1C_2 den Punkt A' einschneidet, welcher β so in die Katheten $C_1A' = b'_1$, $C_2A' = b'_2$ theilt, dass die Hypotenusensumme $B_1A' + B_2A'$ am kleinsten ist. Ersichtlich ist $b'_1 : b'_2 = a_1 : a_2$.

8. Was die Ausdehnung auf *mehr Dreiecke* anlangt, so scheint *Steiner* mit seiner kurzen Bemerkung den folgenden Schluss gemeint zu haben.

Sind irgend zwei der b noch nicht proportional mit den zugehörigen a, so mache man sie, indem ihre Summe und die übrigen b einzeln unverändert bleiben, proportional; man erhält dann eine kleinere Hypotenusensumme, und der vorgelegte Fall war noch nicht der Minimalfall.

Aber man sieht, dass, was mit der einen Veränderung erreicht ist, durch eine folgende wieder zerstört wird, und der Prozess, durch welchen man zu der vollständigen Proportionalität aller b mit den a gelangt, ist unübersehbar.

Es kommt eben darauf an, *bei jeder Veränderung einem b schon die Grösse zu verschaffen, die es beim Minimum haben muss,* und dann es constant zu lassen und bloss noch mit den übrigen zu operiren. Bringt man dies zu Stande, dann gelangt man mit $n-1$ Verwandlungen zum Ziele.

Es sei also $b_1, b_2, \dots b_n$ irgend eine Zerlegung von β, hingegen seien $b'_1, b'_2, \dots b'_n$ die zu $a_1, a_2, \dots a_n$ proportionalen Summanden von β. Da $\Sigma b_i = \Sigma b'_i$, so muss es unter den b mindestens eins geben, das kleiner, und mindestens eins, das grösser ist als sein entsprechendes b'. Es sei $b_1 < b'_1$, $b_2 > b'_2$. Indem wir von dem einfachen Falle $b_1 + b_2 = b'_1 + b'_2$ absehen, haben wir nun die beiden Fälle:

$$1)\quad b_1 + b_2 > b'_1 + b'_2, \qquad 2)\quad b_1 + b_2 < b'_1 + b'_2$$

zu behandeln.

Im Falle 1) (Fig. 2a) seien $b_1 + b_2 = C_1 C_2$ und $b'_1 + b'_2 = C_1 C'_2$ auf dieselbe Gerade gelegt, so dass C'_2 zwischen C_1, C_2 fällt; in C_1 sei senkrecht zu dieser Linie $C_1 B_1 = a_1$, in C_2, C'_2 bez. $C_2 B_2$, $C'_2 B'_2$, beide gleich a_2, aber nach der andern Seite errichtet. $B_1 B'_2$ markirt den Punkt A', der $C_1 C'_2$ in $C_1 A' = b'_1$ und $C'_2 A' = b'_2$ theilt; $B_1 B_2$ gebe den Punkt A, der weiter von C_1 entfernt ist als A'. Ferner sei $C_1 \mathfrak{A} = b_1$, $C_2 \mathfrak{A} = b_2$; so dass $C_1 \mathfrak{A} < C_1 A' < C_1 A$. Folglich ist $B_1 A' + B_2 A' < B_1 \mathfrak{A} + B_2 \mathfrak{A}$. Wird also b_1 durch $C_1 A' = b'_1$ und b_2 durch $C_2 A'$ ersetzt, während die übrigen b unverändert bleiben, so wird die Hypotenusensumme verkleinert und eins der b hat schon die definitive Grösse. Dieses scheidet man nun aus der Zahl der veränderlichen b aus.

Im Falle 2) (Fig. 2b) mache man $C_2 C_1 = b_2 + b_1$, $C_2 C'_1 = b'_2 + b'_1$, so dass C_1 zwischen C_2 und C'_1 liegt; $C_2 B_2 = a_2$, $C_1 B_1 = C'_1 B'_2 = a_1$ seien wieder normal zu $C_2 C_1 C'_1$ errichtet, jenes nach der einen, dieses nach der andern Seite. A, A' ferner seien wie vorhin construirt, endlich $C_2 \mathfrak{A} = b_2$, $C_1 \mathfrak{A} = b_1$. Es muss $\mathfrak{A}$ n. V. zwischen C_1 und A' liegen, so dass A' näher an A ist als $\mathfrak{A}$; folglich ist $B_2 A' + B_1 A' < B_2 \mathfrak{A} + B_1 \mathfrak{A}$. Wir haben also b_2, b_1 zu ersetzen durch $C_2 A' = b'_2$ und $C_1 A'$, um zu einer kleineren Hypotenusensumme und zur definitiven Länge für eins der b zu gelangen.

Die weiteren Verallgemeinerungen sehe man bei *Steiner.*

9. Aus diesem Hilfssatze leitet *Steiner* in Nr. 44 den folgenden Satz ab:

Unter allen n-seitigen Pyramiden von gegebener Höhe und gegebenem Inhalte der Grundfläche hat die regelmässige, d. i. die, deren Grundfläche ein regelmässiges n-Eck ist, in dessen Mittelpunkte der Fusspunkt der Höhe sich befindet, die kleinste Mantelfläche.

Für den Specialfall dieses Satzes, der beim Beweise des Tetraedersatzes zur Anwendung kommt und in welchem alle verglichenen Pyramiden den Fusspunkt ihrer Höhe im Mittelpunkte der Grundfläche haben, genügt es, *arithmetische* Summen der b zu betrachten.

10. Ferner lässt sich mit unserm Hilfssatze, und zwar dem einfacheren Falle für zwei Dreiecke, eine Aufgabe erledigen, welche *Steiner* an anderem Orte (dieses Journal Bd. 14, S. 88 oder Werke Bd. II, S. 25, unter Nr. 8) gestellt hat und die uns auch für den Beweis unseres Tetraedersatzes von Werth und wohl ein Zeichen ist, dass auch *Steiner* die Absicht gehabt hat, denselben auf die nachfolgende Weise darzuthun:

Wenn die Kanten AB, CD eines Tetraeders $ABCD$ auf ihren Geraden r, s, ohne Längenveränderung, verschoben werden, so bleibt bekanntlich das Volumen unverändert; die Oberfläche aber wird dann ein Minimum, wenn AB, CD so auf r, s liegen, dass das gemeinsame Loth EF zwischen diesen Geraden beide mit seinen Fusspunkten halbirt.

Die Verschiebung von AB z. B. auf r verändert weder den Inhalt der Grundfläche ABC, noch die Höhe aus D.

Es seien die Lothe aus A, B auf s und aus C, D auf r bez. AA', BB', CC', DD'; so ist die doppelte Oberfläche

$$AB(CC'+DD')+CD(AA'+BB').$$

Lässt man zunächst noch AB fest, so ist hierin allein $CC'+DD'$ veränderlich; CC', DD' (Fig. 3.) sind aber die Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke, welche beide ihre eine Kathete CC'', bez. DD'' gleich EF haben, während die andere EC'', bez. ED'' gleich $x\sin w$, bez. $y\sin w$*) ist, wofern x, y die (absoluten) Entfernungen CF, DF sind und w der Winkel (r, s) ist. Demnach ist die Summe oder Differenz dieser Katheten constant: $CD\sin w$; die Hypotenusensumme ist folglich am kleinsten, wenn die *Summe* der zweiten Katheten gleich $CD\sin w$ ist und sie selbst einander gleich sind;

*) Die Einführung des Sinus geschieht hier nur, um eine umständlichere Beschreibung zu vermeiden.

d. h. wenn CD durch F halbirt wird. Das Minimum Minimorum ergiebt sich somit, wenn auch AB durch E halbirt wird.

Bei der Ermittelung des Minimums der Oberfläche unserer Tetraeder constanten Volumens können wir uns demnach auf ***solche Tetraeder*** beschränken, ***bei denen zwei Gegenkanten AB, CD durch das gemeinsame Loth EF halbirt werden.***

11. ***Ein Tetraeder von dieser Beschaffenheit können wir ersetzen durch eine vierseitige Pyramide, deren Volumen das Doppelte von dem des Tetraeders ist, während die vier Seitenflächen bez. denen des Tetraeders gleich sind und also die Mantelfläche der Pyramide so gross ist wie die Oberfläche des Tetraeders.***

In der That, wir legen (Fig. 4) durch AB die Ebene parallel zu CD, projiciren CD orthogonal auf sie nach C_1D_1; so halbiren sich AB und C_1D_1 in E. Wir construiren das Parallelogramm $GHJK$, von welchem die Seiten GH, JK durch C_1, D_1 parallel zu AB und die Seiten HJ, KG durch B, A parallel zu C_1D_1 gehen. Die Pyramide über ihm als Grundfläche mit F als Spitze ist die verlangte; denn ersichtlich ist:

$$GHJKF = 4.AC_1BF,$$
$$ABCD = 2.ABCF;$$

die beiden Tetraeder AC_1BF und $ABCF$ haben die gemeinsame Grundfläche ABF, und die Parallelen je von der Spitze nach der Grundfläche, C_1E und CF, sind gleich, also auch die Höhen. Ferner sind die Seitenflächen GHF, HJF, JKF, KGF bez. congruent zu ABD, CDB, ABC, CDA; die einen liegen direct ähnlich je in parallelen Ebenen, die anderen invers ähnlich je in derselben Ebene.

Construiren wir also zu jedem der nun noch zu betrachtenden Tetraeder eine solche Pyramide, so haben diese Pyramiden ebenfalls constantes Volumen, und die Oberfläche ist bei demjenigen Tetraeder am kleinsten, dessen zugehörige Pyramide die kleinste Mantelfläche hat.

Hält man zunächst noch das gemeinsame Loth EF fest, so wie den Inhalt des Parallelogramms, das die Gegenkanten AB, CD des Tetraeders parallel verschoben und an einander gelegt bilden, oder den Inhalt der Grundfläche $GHJK$ der zugehörigen Pyramide; so ergiebt sich nach Nr. 9, da ja alle hier in Betracht kommenden Pyramiden den Höhenfusspunkt im Mittelpunkt der Grundfläche haben, die kleinste Mantel-, bez. Oberfläche, wenn jenes Parallelogramm ein Quadrat ist.

Wir haben es demnach nur noch mit Tetraedern von gegebenem Volumen zu thun, bei denen zwei Gegenkanten AB, CD gleich und rechtwinklig zu einander sind und durch das gemeinsame Loth EF halbirt werden, bez. mit regelmässigen vierseitigen Pyramiden von gegebenem Volumen.

Nach Nr. 6 ergiebt sich dann für letztere die kleinste Mantelfläche, wenn die Seite des Grundquadrats zur Höhe das Verhältniss $\sqrt{2}$ hat, bei den Tetraedern also die kleinste Oberfläche, wenn die beiden gleichen Gegenkanten zum gemeinsamen Lothe dies Verhältniss haben.

Die Gleichheit und Rechtwinkligkeit zweier Gegenkanten AB, CD, ihre Halbirung durch das gemeinsame Loth EF und ihr Verhältniss $\sqrt{2}$ ***zu demselben charakterisiren aber das Tetraeder als ein reguläres.***

Es genügt für eine der vier übrigen Kanten, die ja in diesem Falle ersichtlich unter einander gleich sind, nachzuweisen, dass sie mit *AB* gleich ist, da ein Tetraeder mit sechs gleichen Kanten offenbar regulär ist. Ist nun C_1D_1 wieder die Projection von *CD* auf die zu ihr durch *AB* parallel gelegte Ebene (cf. Fig. 4), so ist:

$$\overline{C_1B}^2 = \overline{C_1E}^2 + \overline{EB}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2;\ \overline{CB}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{C_1B}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2.$$

So sind wir durch drei Transformationen, von denen jede das Volumen unverändert liess, die Oberfläche aber verkleinerte, vom beliebigen Tetraeder zum regelmässigen gelangt.

Damit ist der zweite Theil des Tetraedersatzes bewiesen, der erste ergiebt sich analog wie in Nr. 5. —

Ich habe nachträglich bemerkt, dass die ersten Schritte dieser Ueberführung in einem durch *Steiners* Aufgabe oder vielleicht durch *Steiner* selbst angeregten, vor den *Steiner*schen Abhandlungen 𝔄, 𝔅 erschienenen Aufsatze von *Schällibaum**) gemacht worden sind. Dort ist das gegebene beliebige Tetraeder in ein anderes von gleichem Volumen und kleinerer Oberfläche transformirt, von welchem zwei Gegenkanten noch ***in denselben zwei Geraden liegen, wie beim gegebenen,*** aber von dem gemeinsamen Lothe halbirt werden und einander gleich sind. Der Beweis ist etwas umständlich, und es fehlen eben noch die beiden letzten wesentlichen Veränderungen, die des Winkels der Gegenkanten und der Länge des gemeinsamen Lothes. —

12. Den Beweis 𝔄 Nr. 5 II des Satzes, dass ***unter allen Dreiecken gleichen Umfangs dem gleichseitigen der grösste Inhalt zukommt,*** führt *Steiner*

*) Dieses Journal Bd. 16 S. 82.

so, dass er ein beliebiges Dreieck durch drei Transformationen, bei deren jeder der Umfang unverändert bleibt, der Inhalt aber sich vergrössert, in ein gleichseitiges überführt.

Man kann aber schon mit *zwei* Transformationen zu demselben Ziele gelangen. Mit einer einzigen Transformation kann man schon bewirken, — was ja die Hauptsache ist und wozu *Steiner* zwei Verwandlungen braucht — dass die eine Seite des neuen Dreiecks gleich einem Drittel des Umfangs wird; dann reicht wegen 𝔄 Nr. 3 I die Verwandlung dieses Dreiecks, unter Beibehaltung der genannten Seite als Grundlinie und der Schenkelsumme, in ein gleichschenkliges hin, um das gleichseitige zu erhalten.

Ich benutze denselben Satz 𝔄 Nr. 3 II, auf den sich *Steiner* bei seiner zweiten Transformation stützt, aber in etwas anderer Fassung (so wie ihn *Steiner* z. B. in 𝔄 Nr. 53 annimmt):

Von zwei Dreiecken mit derselben Grundlinie und derselben Schenkelsumme (oder demselben Umfange) hat dasjenige mit der kleineren Schenkeldifferenz den grösseren Inhalt.

Nun sei ABC das beliebige Dreieck mit dem gegebenen Umfange U, und es sei $AB > BC > AC$, so ist $AB > \frac{1}{3}U$, $AC < \frac{1}{3}U$. Wir construiren $A'B'C'$, in dem $B'C' = BC$, $A'B' = \frac{1}{3}U$, $A'B' + A'C' = AB + AC$; da $A'B' < AB$, so ist $A'C' > AC$; und da $A'B' > AC$, so ist $A'C' < AB$; also sind $A'B'$, $A'C'$ beide $< AB$ und beide $> AC$, und demnach ihre Differenz kleiner als $AB - AC$; folglich $A'B'C' > ABC$.

Münster i. W., den 11. September 1883.

Ich erlaube mir, zu dem directen Beweise des Sectorsatzes in § 17 meines letzten Aufsatzes (dieses Journal Bd. 96 S. 36) noch einige Zusatzbemerkungen zu fügen. Zunächst ist in 1) ein Schreibfehler untergelaufen: R ist die gleiche Entfernung der geraden Seiten selbst von C. — Dass die Seiten gleich lang sind, ist nicht nothwendig; wenn nur die Tangenten an den Bogen von K ihnen proportional sind. Da es nur auf die gleiche Entfernung von C ankommt, so ist in 2) die n^{te} Transformation überflüssig. — Wenn der Linienzug in 2) einspringende Theile besitzt, so kann man diese, falls nicht dann ein Heraustreten aus dem Winkel sich ergeben sollte, durch Umklappen in ausspringende verwandeln, wobei der Linienzug seine Länge behält, die Fläche sich aber vergrössert. Oder noch

besser, man wird solche einspringenden Theile durch gerade Verbindungslinien überspannen, wodurch eine Figur mit kleinerem Linienzuge, aber grösserem Inhalte sich ergiebt; diese vergrössert man dann, in Bezug auf C als Aehnlichkeitspunkt, in eine ähnliche und ähnlich gelegene, bei welcher der Linienzug wieder die alte Länge hat. So ist die Sache auf die Behandlung convexer Linienzüge zurückgeführt und auch erreicht, dass die Parallelen zu AB sie höchstens in zwei Punkten treffen. — Bei der Verwandlung des Dreiecks ABC in ein gleichschenkliges D' ist die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass dadurch der Linienzug über den einen Schenkel — an dem der kleinere der beiden Winkel CAB, CBA liegt — hinaustritt. Doch ist ein solches Hinaustreten unbedenklich; denn spätestens bei der Figur, bei welcher der Linienzug aus 2^{n-1} Seiten besteht, von denen in jedem der Winkel der Seiten und Symmetrieaxen nur eine sich befindet, muss dieser Zustand aufgehört haben, und für die Zwischenfiguren ist die Voraussetzung, dass sie innerhalb des Winkels bleiben, nicht nothwendig.

Auf eine kleine Incorrectheit, die aber ohne Einfluss auf den Beweis ist, hat Herr *Reye* mich freundlichst aufmerksam gemacht: S. 66 Z. 6—9. Die beiden Kreise K, K_1 können wohl von einer Transversale der genannten Art in zwei Punktepaaren getroffen werden, die sich gegenseitig ausschliessen; aber dann ist die Summe der Winkel, unter denen diese Punktepaare aus einem beliebigen Punkte, z. B. A, gesehen werden, kleiner als zwei Rechte; während in unserem Falle $CAD + C_1AD_1 > \pi$.

Nach Erscheinen meines Aufsatzes habe ich erfahren, dass der Verfasser der Notiz am Schlusse der Anm. 81 in Bd. II der *Steiner*schen Werke, auf welche ich in § 26 hingewiesen habe, Herr *H. A. Schwarz* ist.

Münster i. W., den 21. März 1884.

Geometrische Construction der Abbildung des Kreisringes auf ein Rechteck.

(Hierzu Fig. 5 auf Tafel I.)

(Von Herrn *E. Study* in Strassburg i. E.)

Im Anschluss daran, dass die von Herrn *Kirchhoff**) gegebene conforme Abbildung des Kreisringes auf die Ebene neuerdings von den Herren *F. Klein***) und *Holzmüller****) wieder zur Sprache gebracht worden ist, erlaube ich mir, im Folgenden eine, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkte einfache Construction dieser Abbildung vorzulegen.

Die *Dupin*sche Cyklide wird bekanntlich von zwei zu einander senkrechten Kugelbüscheln in ihren Krümmungslinien geschnitten. Transformirt man dieselbe in eine Rotationscyklide, so geht der eine dieser Kugelbüschel in den Ebenenbüschel durch die Rotationsaxe, der andere in einen Büschel über, dessen Kugeln ihre Mittelpunkte auf der Rotationsaxe haben.

Bildet man nun diese Rotationsfläche in der bekannten Weise auf ein Rechteck ab, so gehen die Krümmungslinien der beiden Schaaren in zwei zu einander rechtwinklige Parallelenbüschel über, und zwar wird diese Abbildung für die eine der beiden Schaaren, welche durch den Ebenenbüschel ausgeschnitten wird, durch den Winkel vermittelt, welchen die Ebenen des Büschels mit einer festen Ebene bilden. Es liegt nun die Vermuthung nahe, dass etwas Analoges für den zweiten, gleichberechtigten Kugelbüschel der Fall sei; und in der That kann man den die Abbildung vermittelnden Formeln eine Deutung geben, aus welcher dies hervorgeht.

Um dieses nachzuweisen, schicken wir einen Hilfssatz voraus. Es kommt nämlich darauf an, das Bogenelement, welches zwei unendlich benachbarte Kreise, die beide zu dem nämlichen dritten Kreis rechtwinklig

---

*) Gesammelte Abhandlungen S. 56.

**) *Riemanns* Theorie der algebraischen Functionen S. 50.

***) Dieses Journal, Bd. 94, S. 237.

sind, aus dem letzteren ausschneiden, durch den Winkel $d\psi$, welchen die ersten Kreise einschliessen, auszudrücken.

Es sei M (s. Fig. 5. Taf. I) der Mittelpunkt des letzteren Kreises, R dessen Radius; O der Mittelpunkt eines der beiden ersten Kreise, $ds_1 = AA'$ das auszudrückende Bogenelement. Wir werden dann so verfahren, dass wir die beiden Kreisbogen AB und $A'B$ (mit Bezug auf die Bezeichnung der Figur), welche das Winkelelement $d\psi$ einschliessen, mit Hilfe einer Transformation durch reciproke Radien vom Mittelpunkte C aus in gerade Linien verwandeln, und wählen hierzu den Kreis mit dem Mittelpunkte C, welcher den Kreis (M) rechtwinklig schneidet, also den Radius

$$\sqrt{MC^2-R^2} = \sqrt{C^2-R^2}$$

hat. Transformiren wir mit Hülfe dieses Kreises die ganze Figur, so gehen die Punkte A und A' in A_0 und A_1 über, die Kreisbogen BA und BA' in MA_0 und MA_1, und es wird

$$ds_1 = AA' = \frac{A_0A_1 . CA . CA'}{C^2-R^2} = Rd\psi \cdot \frac{R^2-2RC\cos\varphi+C^2}{C^2-R^2},$$

$$d\psi = \frac{(C^2-R^2)d\varphi}{R^2-2RC\cos\varphi+C^2}.$$

Wir denken uns nun den Ring erzeugt durch Rotation eines Kreises vom Radius R, welcher mit der Rotationsaxe OU in einer Ebene liegt, und dessen Mittelpunkt von der letzteren den Abstand $MU = e$ hat. Dann ist

$$BU = UC = +\sqrt{e^2-R^2}, \quad C = e+\sqrt{e^2-R^2},$$

und man hat nach dem oben bewiesenen Hilfssatz

$$ds_1 = Rd\psi \frac{(e+\sqrt{e^2-R^2})^2-2(e+\sqrt{e^2-R^2})R\cos\varphi+R^2}{(e+\sqrt{e^2-R^2})^2-R^2}$$

$$= \frac{e-R\cos\varphi}{\sqrt{e^2-R^2}} Rd\psi.$$

Ist ferner ds_2 das auf ds_1 senkrecht stehende Bogenelement, und bezeichnet man den Rotationswinkel mit χ, so hat man

$$ds_2 = (e-R\cos\varphi)d\chi,$$

woraus, wenn man $\psi' = \frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}\psi$ setzt, das Bogenelement des Ringes in der Form hervorgeht:

$$ds = \sqrt{ds_1^2+ds_2^2} = (e-R\cos\varphi)\sqrt{d\psi'^2+d\chi^2}.$$

Betrachtet man die Winkel χ und $\frac{R}{\sqrt{e^2 - R^2}}\psi$ als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene, so ist hiernach die conforme Abbildung des Ringes auf die Ebene nachgewiesen, indem immer Punkte zusammengehören, welchen der nämliche Werth von χ und ψ entspricht.

Will man die Abbildung wirklich ausführen, so hat man nicht nöthig, die *Dupin*sche Cyklide zuvor in eine Rotationscyklide zu verwandeln.

Es gilt vielmehr folgender allgemeiner Satz, den man aus dem eben gegebenen ohne Schwierigkeit ableiten kann:

„*Ist η der Winkel, welchen zwei Krümmungscurven derselben Schaar mit einander bilden, die auf einer und derselben Orthogonalkugel der Fläche liegen* (d. h. der Winkel der beiden Kugeln, welche die Fläche längs dieser Krümmungscurven berühren) *ϑ der entsprechende Winkel für die zweite Schaar von Krümmungscurven, sind ferner χ und ψ die Winkel, welche zwei beliebige Orthogonalkugeln beider Büschel mit zwei beliebigen festen Kugeln dieser Büschel beziehungsweise bilden, so kann man χ und ψ als Coordinaten auf der Fläche einführen. Betrachtet man dann χ und $\frac{i\psi}{\cos\frac{\eta}{2}} = i\psi\cos\frac{\vartheta}{2}$ als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene, so ist die Fläche auf das in der Ebene entstehende Netz von Rechtecken conform abgebildet, so dass immer zwei Punkte einander entsprechen, welchen die nämlichen Werthe von χ und ψ zugehören*“.

Zwei *Dupin*sche Cykliden können hiernach offenbar nur dann eineindeutig conform auf einander abgebildet werden, wenn die Constante $\cos\frac{\eta}{2}$ oder $\cos\frac{\vartheta}{2}$ bei beiden die nämliche ist. Dann aber kann die Abbildung durch reciproke Radien geschehen. *Dupin*sche Cykliden werden also, wenn überhaupt, durch reciproke Radien conform auf einander abgebildet.

Strassburg i. E., Juni 1883.

Ueber die Grundlagen der Theorie der *Jacobi*schen Functionen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Genügt eine eindeutige analytische Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ von ϱ Variabeln einer Gleichung

$$\varphi(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) = e^{2\pi i(b+\Sigma b_\lambda u_\lambda)}\varphi(u_1, \dots u_\varrho),$$

in welcher $a_1, \dots a_\varrho, b, b_1, \dots b_\varrho$ Constanten sind, so nenne ich das System der Grössen $a_1, \dots a_\varrho$ eine *Periode* der Function φ oder auch eine *Periode erster Gattung*, das System der Grössen $b_1, \dots b_\varrho$ die ihr entsprechende *Periode zweiter Gattung* und die durch die Gleichung $b = c+\frac{1}{2}\Sigma a_\lambda b_\lambda$ definirte Constante c (nach dem Vorgange des Herrn *Weierstrass*) den jener Periode entsprechenden *Parameter*. Ist $g(u_1, \dots u_\varrho)$ eine ganze Function zweiten Grades, so genügt die Function $e^{g(u_1, \dots u_\varrho)}$, die ich eine *Jacobi*sche *Function nullter Ordnung* nenne, für beliebige Werthe von $a_1, \dots a_\varrho$ einer Gleichung von der angegebenen Form. Hat die Function φ unendlich kleine, von Null verschiedene Perioden, d. h. solche, bei denen die Moduln $a_1, \dots a_\varrho$ alle unterhalb einer beliebig angenommenen Grenze liegen, so lassen sich die zweiten partiellen Ableitungen von $\log\varphi$ einem bekannten *Riemann*schen Satze zufolge (dieses Journal Bd. 71, S. 197) durch weniger als ϱ lineare Verbindungen der Variabeln $u_1, \dots u_\varrho$ ausdrücken, und zwar nach einer Erweiterung, die Herr *Weierstrass* (Berliner Monatsberichte 1876) jenem Satze gegeben hat, alle durch die nämlichen Verbindungen. Daher ist φ das Product aus einer *Jacobi*schen Function nullter Ordnung von $u_1, \dots u_\varrho$ und einer Function, welche durch eine lineare Substitution in eine Function von weniger als ϱ Variabeln transformirt werden kann. Umgekehrt hat eine Function dieser Art stets unendlich kleine Perioden. Ich schliesse diesen Fall von der folgenden Untersuchung aus.

Mehrere Perioden heissen ***unabhängig,*** wenn keine von ihnen aus den anderen zusammengesetzt werden kann, indem man sie mit (ganzen oder gebrochenen) rationalen Zahlen multiplicirt und addirt. Befinden sich unter mehreren homogenen linearen Functionen von n Variabeln mit reellen Coefficienten nicht n von einander (algebraisch) unabhängige, so kann man den Variabeln solche ganzzahligen Werthe beilegen, dass die Werthe der Functionen alle unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze liegen. Können also diese Functionen ausserdem für ganzzahlige Werthe der Variabeln nicht sämmtlich verschwinden, so können sie für solche Werthe unendlich klein werden. Daraus folgt der Satz:

I. ***Sind***

$$a_{1\alpha}, \quad \dots \quad a_{\varrho\alpha} \qquad (\alpha = 1, \dots \sigma)$$

σ unabhängige Perioden einer Function, die keine unendlich kleinen Perioden besitzt, und ist

$$a_{\lambda\alpha} = a'_{\lambda\alpha} + i a''_{\lambda\alpha}, \quad a^{(0)}_{\lambda\alpha} = a'_{\lambda\alpha} - i a''_{\lambda\alpha},$$

so können in dem System von σ Zeilen und 2ϱ Colonnen

$$a'_{1\alpha}, \quad \dots \quad a'_{\varrho\alpha}, \quad a''_{1\alpha}, \quad \dots \quad a''_{\varrho\alpha}$$

und folglich auch in dem System

$$a_{1\alpha}, \quad \dots \quad a_{\varrho\alpha}, \quad a^{(0)}_{1\alpha}, \quad \dots \quad a^{(0)}_{\varrho\alpha}$$

die Determinanten σ^{ten} Grades nicht sämmtlich verschwinden.

Mithin muss

$$\sigma \leqq 2\varrho$$

sein. Eine Function von ϱ Variabeln, die im Endlichen überall holomorph ist und genau 2ϱ unabhängige Perioden besitzt, nenne ich eine ***Jacobi*sche *Function vom Range* ϱ.** Eine solche kann nicht unendlich kleine Perioden haben. Denn sonst könnte man nach den Untersuchungen des Herrn ***Weierstrass*** ein Grössensystem $r_1, \dots r_\varrho$ so bestimmen, dass $a_1 = r_1 z, \dots a_\varrho = r_\varrho z$ für willkürliche Werthe von z eine Periode der Function wäre, und daher hätte dieselbe beliebig viele unabhängige Perioden.

§ 1.

Gleichungen zwischen den Perioden.

Die Function $e^{2\pi i z}$ bezeichne ich zur Abkürzung mit $E[z]$. Ich betrachte im Folgenden Functionen von ϱ Variabeln, die im Endlichen überall holomorph sind, keine unendlich kleinen Perioden haben und σ ($\leqq 2\varrho$)

unabhängige Perioden besitzen, also σ Gleichungen von der Form

$$(1.)\quad \varphi(u_1+a_{1\alpha},\ \dots\ u_\varrho+a_{\varrho\alpha}) = E[c_\alpha+\sum_\lambda b_{\lambda\alpha}(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_{\lambda\alpha})]\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho) \qquad (\alpha=1,2,\dots\sigma)$$

erfüllen. Es handelt sich darum, die Bedingungen zu ermitteln, welche die Constanten

$$a_{\lambda\alpha},\quad b_{\lambda\alpha},\quad c_\alpha \qquad (\lambda=1,\dots\varrho;\ \alpha=1,\dots\sigma)$$

befriedigen müssen, damit Functionen existiren, die den oben gestellten Forderungen genügen. Ist

$$\varphi(u_1+a_1,\ \dots\ u_\varrho+a_\varrho) = E[c+\sum b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)]\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho),$$
$$\varphi(u_1+a'_1,\ \dots\ u_\varrho+a'_\varrho) = E[c'+\sum b'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a'_\lambda)]\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho),$$

so erhält man, indem man in der zweiten Gleichung $u_1,\dots u$ um $a_1,\dots a_\varrho$ vermehrt und dann die erste Gleichung benutzt,

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi(u_1+a_1+a'_1,\ \dots\ u_\varrho+a_\varrho+a'_\varrho) \\ = E[c+c'+\sum(b_\lambda+b'_\lambda)(u_\lambda+\tfrac{1}{2}(a_\lambda+a'_\lambda))]\,E[\tfrac{1}{2}\sum(a_\lambda b'_\lambda-a'_\lambda b_\lambda)]\,\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho). \end{cases}$$

Durch Vertauschung von $a_1,\dots a_\varrho$ mit $a'_1,\dots a'_\varrho$ folgt daraus, dass

$$(3.)\quad \sum_\lambda(a_\lambda b'_\lambda-a'_\lambda b_\lambda) = k$$

eine ganze Zahl ist. Demnach sind die σ^2 Grössen

$$(A.)\quad \sum_\lambda(a_{\lambda\alpha}b_{\lambda\beta}-a_{\lambda\beta}b_{\lambda\alpha}) = k_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta=1,\dots\sigma)$$

ganze Zahlen, zwischen denen die Beziehungen

$$(4.)\quad k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha},\quad k_{\alpha\alpha}=0$$

bestehen.

Aus der Gleichung (2.) ergiebt sich leicht die folgende allgemeine Formel: Sind $n_1,\dots n_\sigma$ ganze Zahlen, und ist

$$(5.)\quad a_\lambda = \sum_\alpha n_\alpha a_{\lambda\alpha},\quad b_\lambda = \sum_\alpha n_\alpha b_{\lambda\alpha},$$

so ist

$$(6.)\quad \varphi(u_1+a_1,\ \dots\ u_\varrho+a_\varrho) = E[c+\sum_\lambda b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)]\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho),$$

wo

$$(7.)\quad c = \sum_\alpha n_\alpha c_\alpha+\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' k_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta$$

ist. Durch den Strich beim Summenzeichen wird angedeutet, dass nur über solche Werthepaare summirt werden soll, für welche $\alpha<\beta$ ist.

§ 2.

Ungleichheitsbedingungen für die Perioden.

Sind $v_1, \dots v_\varrho$ Constanten, so hat die Function

$$\varphi(v_1+u_1, \dots v_\varrho+u_\varrho) = \psi(u_1, \dots u_\varrho)$$

dieselben Perioden wie $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$, dagegen die Parameter

$$w_\alpha = c_\alpha + \sum_\lambda b_{\lambda\alpha} v_\lambda.$$

Sind $\xi_1, \dots \xi_\sigma$ reelle Veränderliche, ist

$$r_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}\xi_\alpha, \quad s_\lambda = \sum_\alpha b_{\lambda\alpha}\xi_\alpha$$

und

$$E[-\tfrac{1}{2}\Sigma r_\lambda s_\lambda - \Sigma w_\alpha \xi_\alpha]\psi(r_1, \dots r_\varrho) = L(\xi_1, \dots \xi_\sigma),$$

so ist

$$L(\xi_1, \dots \xi_\gamma+1, \dots \xi_\sigma) = E[\tfrac{1}{2}\sum_\alpha k_{\alpha\gamma}\xi_\alpha]L(\xi_1, \dots \xi_\gamma, \dots \xi_\sigma).$$

Der absolute Werth des ersten Factors der rechten Seite ist gleich 1. Weil ferner φ im Endlichen überall *holomorph* ist, so liegen die Werthe, welche $L(\xi_1, \dots \xi_\sigma)$ annimmt, wenn sich jede der σ Variabeln ξ_α zwischen den Grenzen 0 und 1 bewegt, alle unterhalb einer endlichen Grenze G. Da aber der absolute Werth jener Function ungeändert bleibt, wenn eine dieser Variabeln um 1 vermehrt wird, so liegt der absolute Werth von L für alle reellen Werthe der Variabeln ξ_α unterhalb derselben Grenze.

Ich betrachte nun zunächst den Fall, wo man den ϱ linearen Gleichungen

$$(1.) \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0$$

durch Werthe der σ Unbekannten x_α genügen kann, die nicht sämmtlich verschwinden. Ist z irgend eine complexe Grösse, so sei $z^{(0)}$ die conjugirt complexe Grösse. Dann können die ϱ Grössen

$$(2.) \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha^{(0)} = r_\lambda$$

nicht sämmtlich verschwinden. Denn sonst wäre

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)} x_\alpha = 0,$$

und folglich müssten die Grössen x_α sämmtlich verschwinden, da nach Satz I. die aus den Coefficienten dieser 2ϱ Gleichungen gebildeten Determinanten σ^{ten} Grades nicht alle Null sind. Setzt man nun $x_\alpha + x_\alpha^{(0)} = \xi_\alpha$, so folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.)

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha}\xi_\alpha = r_\lambda,$$

und folglich ist

$$\psi(r_1, \dots r_\varrho) = E[\tfrac{1}{2}\Sigma r_\lambda s_\lambda + \Sigma w_\alpha \xi_\alpha]L,$$

wo L dem absoluten Werthe nach kleiner ist als eine Grösse G, die von der Wahl der Lösung x_α unabhängig ist. Den Gleichungen (1.) zufolge ist

$$\sum_\lambda r_\lambda s_\lambda = \sum_{\alpha,\beta,\lambda} a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta}(x_\alpha + x_\alpha^{(0)})(x_\beta + x_\beta^{(0)}) = \Sigma a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} x_\alpha^{(0)}(x_\beta + x_\beta^{(0)})$$
$$= \Sigma(a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) x_\alpha^{(0)} x_\beta + \Sigma a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta^{(0)} = \Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta + \Sigma a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta^{(0)}.$$

Setzt man also

$$\tfrac{1}{2}\Sigma a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta^{(0)} = s, \quad \Sigma(w_\alpha - w_\alpha^{(0)}) x_\alpha^{(0)} = w,$$
$$i\pi \Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta = p, \quad E[\Sigma(w_\alpha x_\alpha + w_\alpha^{(0)} x_\alpha^{(0)})] L = K,$$

so ist p eine reelle Grösse, und es ist

$$E[-s-w]\psi(r_1, \ldots r_\varrho) = e^p K.$$

Da der absolute Werth des ersten Factors von K gleich 1 ist, so ist auch $K < G$.

Ist z eine complexe Variable, und genügen die Grössen x_α den Bedingungen (1.), so genügen ihnen auch die Grössen $x_\alpha z^{(0)}$. Ersetzt man aber x_α durch $x_\alpha z^{(0)}$, so gehen r_λ, s, w, p in $r_\lambda z$, sz^2, wz, $pzz^{(0)}$ über. Ist also

$$\chi(z) = E[-sz^2 - wz]\psi(r_1 z, \ldots r_\varrho z),$$

so ist

$$(3.) \qquad \chi(z) = e^{pzz_0} M,$$

wo M dem absoluten Werthe nach kleiner ist als eine von z unabhängige Grösse G.

Die Grössen $v_1, \ldots v_\varrho$ kann man immer so wählen, dass $\chi(z)$ nicht von z unabhängig ist. Denn sonst wäre für alle Werthe dieser Grössen $\chi(z) = \chi(0)$ oder

$$E[-sz^2]\frac{\varphi(v_1 + r_1 z, \ldots v_\varrho + r_\varrho z)}{\varphi(v_1, \ldots v_\varrho)} = E[zw].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine im Endlichen überall meromorphe Function der ϱ complexen Variabeln v_λ. Auf der rechten Seite ist w eine lineare Function der Veränderlichen v_λ und $v_\lambda^{(0)}$. Aus dieser Gleichung würde daher zunächst folgen, dass w die Grössen $v_\lambda^{(0)}$ nicht enthält, sondern eine lineare Function der Variabeln v_λ allein ist, $w = t + \Sigma s_\lambda v_\lambda$. Dann müsste aber der Gleichung

$$\varphi(v_1 + r_1 z, \ldots v_\varrho + r_\varrho z) = E[tz + sz^2 + z\Sigma s_\lambda v_\lambda]\varphi(v_1, \ldots v_\varrho)$$

zufolge die Function φ die Periode $r_\lambda z$ haben, also, da $r_1, \ldots r_\varrho$ nicht sämmtlich verschwinden und z willkürlich ist, unendlich kleine Perioden besitzen, wider die Voraussetzung.

Nach einem bekannten Satze der Functionentheorie kann eine Function, die im Endlichen überall holomorph und keine Constante ist, nicht für alle

endlichen Werthe der Variabeln unterhalb einer bestimmten endlichen Grenze liegen*). Mit Hülfe desselben ergiebt sich aus der Gleichung (3.), dass p positiv ist. Denn wäre p negativ oder Null, so würde, da $zz^{(0)}$ positiv ist, der absolute Werth der Function $\chi(z)$ für alle endlichen Werthe von z unter der Grenze G liegen. Daraus folgt:

B. Genügen die σ complexen Variabeln x_α den ϱ linearen Gleichungen

$$(1.)\qquad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots \varrho),$$

so ist der Ausdruck

$$(4.)\qquad i \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta$$

beständig positiv und verschwindet nur, wenn jene Variabeln sämmtlich Null sind.

Für den oben ausgeschlossenen Fall nämlich, wo die Gleichungen (1.) nur durch die Werthe $x_\alpha = 0$ befriedigt werden können, ist dieser Satz selbstverständlich.

Mit einer geringen Abänderung lässt sich die obige Deduction auch auf den Fall anwenden, wo die Perioden $a_{\lambda\alpha}$ nicht unabhängig sind, und führt zu dem allgemeineren Resultate:

B. Genügen die σ complexen Variabeln x_α den ϱ linearen Gleichungen*

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots \varrho),$$

so ist der Ausdruck $i \sum k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta$ beständig positiv und verschwindet nur für solche Werthe jener Variabeln, welche zugleich die ϱ linearen Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)} x_\alpha = 0$$

befriedigen.

Die gemeinschaftlichen Lösungen dieser 2ϱ linearen Gleichungen sind, wie leicht zu sehen, lineare Combinationen der rationalen Lösungen der Gleichungen (1.).

§ 3.

Folgerungen aus den Bedingungen *A.* und *B.*

Damit die Grössen $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$ die Perioden einer Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ sein können, müssen sie den Gleichungen *A.* und den Ungleichheiten *B.* genügen. In diesen Bedingungen ist die in Satz I. ausgesprochene Eigenschaft bereits enthalten. Da

$$(1.)\qquad i \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta = i \sum_\lambda \Big[\Big(\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha^{(0)}\Big)\Big(\sum_\beta b_{\lambda\beta} x_\beta\Big) - \Big(\sum_\beta a_{\lambda\beta} x_\beta\Big)\Big(\sum_\alpha b_{\lambda\alpha} x_\alpha^{(0)}\Big)\Big]$$

---

*) Herr *Weierstrass* hat in seinen Vorlesungen diesen Satz in ähnlicher Art angewendet, um die Bedingungen der Convergenz der Thetareihen abzuleiten.

ist, so ist unter den Bedingungen

$$(2.)\qquad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0$$

der Ausdruck

$$(3.)\qquad i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta = i\sum_\lambda \Big(\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha^{(1)}\Big)\Big(\sum_\beta b_{\lambda\beta} x_\beta\Big).$$

Wären nun in dem Systeme

$$(4.)\qquad a_{1\alpha},\ \ldots\ a_{\varrho\alpha},\ a_{1\alpha}^{(1)},\ \ldots\ a_{\varrho\alpha}^{(1)} \qquad (\alpha = 1, \ldots \sigma)$$

die Determinanten σ^{ten} Grades alle Null, so könnte man σ Grössen x_α finden, die nicht sämmtlich Null sind und den 2ϱ Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0,\quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(1)} x_\alpha = 0$$

genügen. Daher wäre auch $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha^{(1)} = 0$, und mithin würde der Ausdruck (3.) verschwinden. Dies widerspricht aber dem Satze *B*. Daraus folgt noch, dass σ den Ungleichheiten *B*. genügende Perioden nothwendig unabhängig sein müssen.

Ich entwickle nun einige weitere Sätze, die sich aus den Bedingungen *A*. und *B*. ergeben:

II. *In dem System von σ Zeilen und 2ϱ Colonnen*

$$(5.)\qquad a_{1\alpha},\ \ldots\ a_{\varrho\alpha},\ b_{1\alpha},\ \ldots\ b_{\varrho\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots \sigma)$$

sind die Determinanten σ^{ten} Grades nicht alle Null.

Denn sonst könnte man den 2ϱ linearen Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\lambda\beta} x_\beta = 0,\quad \sum_\beta b_{\lambda\beta} x_\beta = 0$$

durch σ Grössen x_β genügen, die nicht alle Null sind, und mithin würde der Ausdruck (1.) verschwinden.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man leicht einsehen, wesshalb sich für die Parameter c_α keine Bedingungen ergeben. Sind nämlich g_λ, h_λ Constanten, so hat die Function $E[\Sigma g_\lambda u_\lambda]\ \varphi(h_1+u_1, \ldots h_\varrho+u_\varrho)$ die nämlichen Perioden wie φ, dagegen die Parameter $c'_\alpha = c_\alpha + \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} g_\lambda + b_{\lambda\alpha} h_\lambda)$. Nach Satz II. kann man daher den Grössen g_λ, h_λ solche Werthe ertheilen, dass die Parameter c'_α beliebig gegebene Werthe erhalten.

III. *Ist der Rang *) des Systems*

$$a_{\lambda\alpha} \qquad (\lambda = 1, \ldots \varrho;\ \alpha = 1, \ldots \sigma)$$

gleich ν, und der des alternirenden Systems

$$k_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots \sigma)$$

gleich $2\varkappa$, so ist

$$(6.)\qquad \varkappa + \nu \leq \sigma,$$

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 86, S. 148.

Die linearen Formen

$$P_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} p_\alpha, \quad Q_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)} q_\alpha, \quad R_\beta = \sum_\alpha k_{\alpha\beta} r_\alpha, \quad S_\beta = p_\beta + q_\beta + r_\beta$$

können nicht sämmtlich verschwinden, ohne dass die Variabeln p_α, q_α, r_α alle Null sind. Denn da

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta^{(0)} = \sum_\lambda [(\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} p_\alpha)(\sum_\beta b_{\lambda\beta} q_\beta^{(0)}) - (\sum_\beta a_{\lambda\beta} q_\beta^{(0)})(\sum_\alpha b_{\lambda\alpha} p_\alpha)]$$

ist, so ist, wenn $P_\lambda = 0$ und $Q_\lambda^{(0)} = 0$ ist, auch

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta^{(0)} = 0.$$

Multiplicirt man daher die aus $R_\beta = 0$ und $S_\beta = 0$ folgende Gleichung

$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta}(p_\alpha + q_\alpha) = 0$$

mit $q_\beta^{(0)}$ und summirt nach β, so erhält man

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta^{(0)} = 0.$$

Aus dieser Relation und den Gleichungen $Q_\lambda^{(0)} = 0$ folgt aber nach *B.*, dass die Grössen q_α sämmtlich verschwinden. Ebenso beweist man, dass auch die Grössen p_α alle Null sind. Den Gleichungen $S_\alpha = 0$ zufolge verschwinden daher auch die Grössen r_α.

Mithin ist die Anzahl der unabhängigen unter jenen linearen Formen der Anzahl der Variabeln 3σ gleich. Nach den gemachten Annahmen sind von den Formen P_λ und Q_λ je ν und von den Formen R_λ $2\varkappa$ unabhängig (dass der Rang eines alternirenden Systems stets eine gerade Zahl ist, habe ich dieses Journal, Bd. 82, S. 242 gezeigt); ferner sind die σ Formen S_β unter einander unabhängig. Daher ist

$$2\nu + 2\varkappa + \sigma \geqq 3\sigma \quad \text{oder} \quad \varkappa + \nu \geqq \sigma.$$

Da $\nu \leqq \varrho$ und $2\varkappa \leqq \sigma$ ist, so folgt daraus

$$(7.) \qquad \varkappa \geqq (\sigma - \varrho), \qquad \nu \geqq \tfrac{1}{2}\sigma.$$

IV. *In dem System $k_{\alpha\beta}$ sind die Determinanten $2(\sigma-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle Null. In dem System $a_{\lambda\alpha}$ sind die Determinanten vom Grade $\frac{1}{2}\sigma$ oder $\frac{1}{2}(\sigma+1)$ nicht alle Null.*

Es wird sich zeigen, dass die Zahlen $k_{\alpha\beta}$, an und für sich betrachtet, einer weiteren Einschränkung nicht unterliegen.

Ist $\varkappa = 0$, so ist $\nu \geqq \sigma$. Da aber das System $a_{\lambda\alpha}$ nur aus σ Colonnen besteht, so kann nicht $\nu > \sigma$ sein. Mithin ist $\nu = \sigma$ und folglich $\sigma \leqq \varrho$.

V. *Sind für eine Function mit σ unabhängigen Perioden die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ sämmtlich Null, so können in dem System*

$$a_{\lambda\alpha} \qquad (\lambda = 1, \ldots \varrho;\ \alpha = 1, \ldots \sigma)$$

die Determinanten σ^{ten} Grades nicht alle verschwinden, und mithin ist $\sigma \leqq \varrho$.

Dies kann man auch leicht direct einsehen. Wäre nämlich $\nu < \sigma$, so könnte man σ Grössen x_α finden, die nicht alle Null sind und den Gleichungen (2.) genügen. Für diese müsste also der Ausdruck (1.) einen von Null verschiedenen positiven Werth haben, während er nach der Annahme Null ist. Da ferner das System $a_{\lambda\alpha}$ nur aus ϱ Colonnen besteht, so kann nur, wenn $\sigma \leqq \varrho$ ist, eine Determinante σ^{ten} Grades aus seinen Elementen von Null verschieden sein. Speciell ergiebt sich für $\sigma = \varrho$ die Folgerung, dass die Determinante ϱ^{ten} Grades $|a_{\lambda\alpha}|$ von Null verschieden ist. Ein Corollar des obigen Satzes ist das folgende Theorem, in welchem das Wort Periode in dem gewöhnlichen Sinne genommen ist $(\varphi(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) = \varphi(u_1, \dots u_\varrho))$:

VI. ***Eine Function von ϱ Variabeln, die im Endlichen überall holomorph ist, und keine unendlich kleinen Perioden hat, kann nicht mehr als ϱ unabhängige Perioden besitzen, und in jedem System von σ unabhängigen Perioden einer solchen Function sind die Determinanten σ^{ten} Grades nicht sämmtlich Null.***

§ 4.

Construction der Periodensysteme.

Ich gehe nun dazu über zu zeigen, wie man alle Systeme von Grössen

$$(1.)\qquad a_{\lambda\alpha},\quad b_{\lambda\alpha}\qquad\qquad (\lambda = 1, \dots \varrho;\ \alpha = 1, \dots \sigma)$$

finden kann, welche die Bedingungen *A.* und *B.* befriedigen.

Sei (1.) ein gegebenes System dieser Art. Ist $\sigma < 2\varrho$, so seien $k_{\alpha,\sigma+1}$ $(\alpha = 1, \dots \sigma)$ σ ganze Zahlen, die nur der Einschränkung unterliegen, dass in dem alternirenden System $k_{\gamma\delta}$ $(\gamma, \delta = 1, \dots \sigma+1)$ die Determinanten $2(\sigma+1-\varrho)^{\text{ten}}$ Grades nicht sämmtlich verschwinden. (Vgl. Satz IV). Dann kann man, wie ich jetzt zeigen will, stets 2ϱ Grössen $a_{\lambda,\sigma+1}$, $b_{\lambda,\sigma+1}$ finden, welche den Gleichungen

$$(2.)\qquad \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda,\sigma+1} - a_{\lambda,\sigma+1} b_{\lambda\alpha}) = k_{\alpha,\sigma+1}$$

genügen und die Ungleichheiten *B.* befriedigen, falls man in denselben σ durch $\sigma+1$ ersetzt.

Zunächst kann man die Zahlen $k_{\alpha,\sigma+1}$ stets so wählen, wie oben gefordert wurde. Da nämlich der Rang r des alternirenden Systems $k_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots \sigma)$ stets eine gerade Zahl ist, so ist er, wenn er $> 2(\sigma-\varrho)$ ist, mindestens $2(\sigma+1-\varrho)$, und daher kann man jene σ Zahlen ganz beliebig annehmen. Ist aber $r = 2(\sigma-\varrho)$, so können in jenem System die *Hauptdeterminanten*

τ^{ten} Grades nicht sämmtlich verschwinden (dieses Journal Bd. 82, S. 242). Sei etwa $|k_{\alpha\beta}|(\alpha, \beta = 1, \dots \tau)$ von Null verschieden. Setzt man dann $k_{\sigma,\sigma+1} = 1$ und sonst $k_{\alpha,\sigma+1} = 0$, so ist die Determinante $(\tau+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1\tau} & k_{1\sigma} & k_{1,\sigma+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{\tau 1} & \dots & k_{\tau\tau} & k_{\tau\sigma} & k_{\tau,\sigma+1} \\ k_{\sigma 1} & \dots & k_{\sigma\tau} & k_{\sigma\sigma} & k_{\sigma,\sigma+1} \\ k_{\sigma+1,1} & \dots & k_{\sigma+1,\tau} & k_{\sigma+1,\sigma} & k_{\sigma+1,\sigma+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1\tau} & k_{1\sigma} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{\tau 1} & \dots & k_{\tau\tau} & k_{\tau\sigma} & 0 \\ k_{\sigma 1} & \dots & k_{\sigma\tau} & k_{\sigma\sigma} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{\tau 1} & \dots & k_{\tau\tau} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

Im Folgenden möge sich der Index λ von 1 bis ϱ, die Indices α, β von 1 bis σ und die Indices γ, δ von 1 bis $\sigma+1$ bewegen. Sei ferner ν der Rang des Systems $a_{\lambda\alpha}$ und $2\varkappa$ der des Systems $k_{\gamma\delta}$. Ich werde zwei Methoden entwickeln, die Grössen $a_{\lambda,\sigma+1}$, $b_{\lambda,\sigma+1}$ zu bestimmen, von denen die erste immer anwendbar ist, wenn $\nu < \varrho$ ist, die zweite, wenn $\varkappa > \sigma-\nu$ ist. Ist $\nu = \varrho$, so ist nach der Festsetzung, die ich über die Zahlen $k_{\alpha,\sigma+1}$ getroffen habe, $\varkappa > \sigma-\nu$, und daher ist in diesem Falle immer die zweite Methode anwendbar, und nur diese. Ist $\nu < \varrho$ und $\varkappa > \sigma-\nu$, so können beide Methoden gebraucht werden, ist aber $\nu < \varrho$ und $\varkappa = \sigma-\nu$, nur die erste. (Nach Satz III. kann nicht $\varkappa < \sigma-\nu$ sein.)

I. Ist $\nu < \varrho$, so kann man eine Lösung der Gleichungen (2.) finden, für welche der Rang des Systems $a_{\lambda\gamma}$ gleich $\nu+1$ ist. Damit derselbe nämlich gleich ν sei, ist nothwendig und hinreichend, dass jede Lösung der σ Gleichungen

$$(3.) \qquad \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} w_\lambda = 0$$

auch der Gleichung $\sum_\lambda a_{\lambda,\sigma+1} w_\lambda = 0$ genügt. Wäre dies für jede Lösung $a_{\lambda,\sigma+1}$, $b_{\lambda,\sigma+1}$ der (nach Satz II. unabhängigen) Gleichungen (2.) der Fall, so würde, wenn $w_\lambda = b_\lambda$ irgend eine Lösung der Gleichungen (3.) ist, die Gleichung $W \equiv \sum_\lambda b_\lambda u_\lambda = 0$ eine Folge der Gleichungen

$$W_\alpha \equiv \sum_\lambda (b_{\lambda\alpha} u_\lambda - a_{\lambda\alpha} v_\lambda) + k_{\alpha,\sigma+1} = 0$$

sein, und daher wäre W eine lineare Combination der Functionen W_α,

$$W \equiv \sum p_\beta W_\beta,$$

es wäre also

$$(4.) \qquad \sum_\beta a_{\lambda\beta} p_\beta = 0,$$

$$(5.) \qquad \sum_\beta b_{\lambda\beta} p_\beta = b_\lambda.$$

Daher wäre

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta} p_\beta = \sum_\lambda [a_{\lambda\alpha}(\sum_\beta b_{\lambda\beta} p_\beta) - b_{\lambda\alpha}(\sum_\beta a_{\lambda\beta} p_\beta)] = \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} b_\lambda = 0$$

und mithin auch

$$(6.) \qquad \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} p_\alpha^{(0)} p_\beta = 0.$$

Nach Satz *B.* können die Gleichungen (4.) und (6.) aber nur bestehen, wenn die Grössen p_β sämmtlich verschwinden. Dann würden aber nach (5.) auch die Grössen b_λ alle Null sein. Ist aber $\nu < \varrho$, so kann man den Gleichungen (3.) durch Werthe genügen, die nicht sämmtlich verschwinden.

Ist nun der Rang des Systems $a_{\lambda\gamma}$ um 1 grösser als der des Systems $a_{\lambda\alpha}$, so ist in jeder Lösung der Gleichungen

$$(7.) \qquad \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} x_\gamma = 0$$

$x_{\sigma+1} = 0$. Da nach der Voraussetzung für jede Lösung der Gleichungen $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0$ der Ausdruck $i \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta$ positiv ist, so ist auch für jede Lösung der Gleichungen (7.) der Ausdruck

$$(8.) \qquad i \sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta} x_\gamma^{(0)} x_\delta$$

positiv.

II. Ist $\varkappa > \sigma - \nu$, so kann man eine Lösung der 2σ Gleichungen

$$(9.) \qquad \sum_\gamma k_{\alpha\gamma} x_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} y_\lambda = 0, \quad \sum_\gamma k_{\alpha\gamma} x_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)} z_\lambda = 0$$

finden, in der $x_{\sigma+1} = -1$ ist, und für welche der Ausdruck (8.) positiv ist.

1. Die 2σ linearen Formen

$$Y_\alpha \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} y_\lambda, \quad Z_\alpha \equiv \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)} z_\lambda$$

der $\sigma + 2\varrho$ Variabeln x_β, y_λ, z_λ sind von einander unabhängig. Denn ist $\sum_\alpha (p_\alpha Y_\alpha + q_\alpha Z_\alpha) \equiv 0$, so ist

$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta}(p_\alpha + q_\alpha) = 0, \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} p_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)} q_\alpha = 0.$$

Nach dem Beweise des Satzes III. § 3 folgt daraus, dass die Grössen p_α, q_α sämmtlich verschwinden. Daher sind die 2σ Gleichungen (9.) unabhängig und haben Lösungen, in denen $x_{\sigma+1}$ von Null verschieden ist.

2. Der Ausdruck (8.) kann nicht für alle Lösungen der Gleichungen (9.) verschwinden. Im entgegengesetzten Falle seien nämlich x_γ, y_λ, z_λ und u_γ, v_λ, w_λ zwei ihrer Lösungen, sei also

$$V_\alpha \equiv \sum_\gamma k_{\alpha\gamma} u_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} v_\lambda = 0, \quad W_\alpha \equiv \sum_\gamma k_{\alpha\gamma} u_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)} w_\lambda = 0.$$

Dann ist, falls r eine willkürliche Grösse ist, auch $x_\gamma + r u_\gamma$, $y_\lambda + r v_\lambda$, $z_\lambda + r w_\lambda$

eine Lösung derselben. Nach der gemachten Voraussetzung ist daher

$$\sum_{\gamma,\delta} k_{\delta\gamma}(x_\delta^{(0)}+r^{(0)}u_\delta^{(0)})(x_\gamma+ru_\gamma) = 0$$

und mithin auch

$$U \equiv \sum_{\gamma,\delta} k_{\delta\gamma}x_\delta^{(0)}u_\gamma = 0.$$

Ist x_γ, y_λ, z_λ eine bestimmte Lösung der Gleichungen (9.), so verschwindet folglich die lineare Function U der Variabeln u_γ, v_λ, w_λ für alle Werthe, für welche die 2σ linearen Functionen V_α, W_α Null sind, und mithin ist U eine lineare Combination dieser Functionen

$$U \equiv \Sigma(p_\alpha V_\alpha + q_\alpha W_\alpha).$$

Zu jeder Lösung x_γ, y_λ, z_λ der Gleichungen (9.) lassen sich also 2σ Grössen p_α, q_α so bestimmen, dass die Gleichungen bestehen

$$(10.) \quad \sum_\delta k_{\delta\gamma}x_\delta^{(0)} = \sum_\alpha k_{\alpha\gamma}(p_\alpha+q_\alpha),$$

$$(11.) \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}p_\alpha = 0,$$

$$(12.) \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)}q_\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}q_\alpha^{(0)} = 0.$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung (9.) mit q_α und summirt nach α, so erhält man den Relationen (12.) zufolge

$$\sum_{\alpha,\gamma} k_{\alpha\gamma}x_\gamma q_\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{\beta,\delta} k_{\delta\beta}x_\delta^{(0)}q_\beta^{(0)} = 0.$$

Wie im Beweise des Satzes III. § 3 ergiebt sich ferner aus den Gleichungen (11.) und (12.)

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}p_\alpha q_\beta^{(0)} = 0.$$

Betrachtet man daher die ersten σ Gleichungen (10.)

$$\sum_\delta k_{\delta\beta}x_\delta^{(0)} = \sum_\alpha k_{\alpha\beta}(p_\alpha+q_\alpha),$$

multiplicirt die β^{te} mit $q_\beta^{(0)}$ und addirt, so erhält man

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta^{(0)} = 0.$$

Daraus folgt, wie oben, dass die Grössen q_α sämmtlich Null sind. Ebenso zeigt man, dass die Grössen p_α alle verschwinden. Folglich reduciren sich die Gleichungen (10.) auf $\sum_\delta k_{\delta\gamma}x_\delta^{(0)} = 0$ oder

$$(13.) \quad \sum_\gamma k_{\delta\gamma}x_\gamma = 0,$$

und daher ist nach (9.) auch

$$(14.) \quad \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}y_\lambda = 0, \quad \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)}z_\lambda = 0.$$

Unter den Gleichungen (13.) und (14.) sind $2\varkappa+2\nu$ von einander unabhängig. Da dieselben eine Folge der 2σ unabhängigen Gleichungen (9.) sind, so ist $2\varkappa+2\nu \leqq 2\sigma$ oder $\varkappa \leqq \sigma-\nu$, wider die oben gemachte Voraussetzung.

3. Die Gleichungen (9.) haben nach 1. Lösungen

$$(15.)\qquad x_\gamma = a_\gamma,\quad y_\lambda = b_\lambda,\quad z_\lambda = c_\lambda,$$

in denen $a_{\sigma+1}$ von Null verschieden ist, und nach 2. Lösungen $x_\gamma = A_\gamma$, $y_\lambda = B_\lambda$, $z_\lambda = C_\lambda$, für welche der Ausdruck (8.) nicht verschwindet. Sie haben auch Lösungen, die beide Eigenschaften in sich vereinigen. Denn wenn dies bei keiner der beiden obigen stattfindet und r eine unbestimmte Grösse ist, so tritt dieser Fall, wie leicht zu sehen, bei der Lösung

$$x_\gamma = a_\gamma+rA_\gamma,\quad y_\lambda = b_\lambda+rB_\lambda,\quad z_\lambda = c_\lambda+rC_\lambda$$

ein. Nehmen wir nun an, dass die Lösung (15.) den beiden aufgestellten Forderungen genügt, so genügt ihnen auch, falls s eine von Null verschiedene Grösse ist, die Lösung $x_\gamma = sa_\gamma$, $y_\lambda = sb_\lambda$, $z_\lambda = sc_\lambda$. Wir können daher weiter voraussetzen, dass $a_{\sigma+1} = -1$ ist. Ist aber

$$(16.)\qquad \sum_\gamma k_{\alpha\gamma}a_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}b_\lambda = 0,\quad \sum_\gamma k_{\alpha\gamma}a_\gamma + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)}c_\lambda = 0,$$

so ist auch

$$\sum_\gamma k_{\alpha\gamma}a_\gamma^{(0)} + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}c_\lambda^{(0)} = 0,\quad \sum_\gamma k_{\alpha\gamma}a_\gamma^{(0)} + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)}b_\lambda^{(0)} = 0;$$

es ist also auch $x_\gamma = a_\gamma^{(0)}$, $y_\lambda = c_\lambda^{(0)}$, $z_\lambda = b_\lambda^{(0)}$ eine Lösung der Gleichungen (9.), welche die nämlichen Eigenschaften hat, wie die Lösung (15.). Da nun $k_{\gamma\delta} = -k_{\delta\gamma}$ ist, so ist $i\sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}a_\gamma^{(0)}a_\delta = -i\sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}a_\gamma a_\delta^{(0)}$, und mithin ist der Ausdruck (8.) für die eine jener beiden Lösungen positiv.

4. Damit ist die Existenz eines Systems von Grössen (15.) dargethan, welche den Gleichungen (16.) genügen, von denen $a_{\sigma+1} = -1$ ist, und für welche $i\sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}a_\gamma^{(0)}a_\delta$ positiv ist. Ich setze nun

$$(17.)\qquad a_{\lambda,\sigma+1} = \sum_\beta a_{\lambda\beta}a_\beta,\quad b_{\lambda,\sigma+1} = \sum_\beta b_{\lambda\beta}a_\beta + b_\lambda.$$

Dann ist

$$\sum_\lambda (a_{\lambda\alpha}b_{\lambda,\sigma+1} - b_{\lambda\alpha}a_{\lambda,\sigma+1}) = \sum_{\lambda,\beta}[a_{\lambda\alpha}(b_{\lambda\beta}a_\beta + b_\lambda) - b_{\lambda\alpha}a_{\lambda\beta}a_\beta] = \sum_\beta k_{\alpha\beta}a_\beta + \sum_\lambda a_{\lambda\alpha}b_\lambda,$$

also nach der ersten Gleichung (16.)

$$\sum_\lambda (a_{\lambda\alpha}b_{\lambda,\sigma+1} - b_{\lambda\alpha}a_{\lambda,\sigma+1}) = k_{\alpha,\sigma+1}.$$

Ferner ist der Ausdruck (8.) für alle Lösungen der Gleichungen (7.) positiv. Für diejenigen Lösungen, in denen $x_{\sigma+1} = 0$ ist, findet dies nach Voraussetzung statt. Der Ausdruck (8.) wird ferner für alle Lösungen, in

denen $x_{\sigma+1}$ von Null verschieden ist, positiv sein, wenn er es für diejenigen ist, in denen $x_{\sigma+1}=-1$ ist. Eine solche ist den Gleichungen (17.) zufolge $x_\gamma = a_\gamma$, wenn $a_{\sigma+1}=-1$ ist. Die allgemeinste Lösung dieser Art ist daher $x_\gamma = a_\gamma + u_\gamma$, falls $u_{\sigma+1}=0$ ist, und u_α irgend eine Lösung der Gleichungen $\sum\limits_\alpha a_{\lambda\alpha}u_\alpha = 0$ ist. Für solche Werthe u_α ist aber $i\sum\limits_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}u_\alpha^{(0)}u_\beta$ oder, weil $u_{\sigma+1}=0$ ist, $i\sum\limits_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}u_\gamma^{(0)}u_\delta$ positiv. Multiplicirt man die zweite Gleichung (16.) mit $u_\alpha^{(0)}$ und summirt nach α, so erhält man $\sum\limits_{\alpha,\gamma} k_{\alpha\gamma}a_\gamma u_\alpha^{(0)} = 0$, also weil $u_{\sigma+1}=0$ ist,

$$\sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}u_\gamma^{(0)}a_\delta = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}a_\gamma^{(0)}u_\delta = 0$$

und mithin

$$i\sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta}x_\gamma^{(0)}x_\delta = i\sum k_{\gamma\delta}(a_\gamma^{(0)}+u_\gamma^{(0)})(a_\delta+u_\delta) = i\sum k_{\gamma\delta}a_\gamma^{(0)}a_\delta + i\sum k_{\gamma\delta}u_\gamma^{(0)}u_\delta.$$

Als Summe von zwei positiven Grössen, deren erste nicht Null ist, ist dieser Ausdruck daher positiv und von Null verschieden.

Während das System von $\sigma+1$ Perioden $a_{\lambda\gamma}$, zu welchem das System von σ Perioden $a_{\lambda\alpha}$ ergänzt ist, bei Anwendung der Methode I. vom Range $\nu+1$ ist, ist es nach (17.) bei Anwendung der Methode II. vom Range ν. Durch wiederholte Benutzung der entwickelten Regeln kann man irgend ein gegebenes System von Grössen (1.), das die Bedingungen *A.* und *B.* erfüllt, zu einem System von 2ϱ Perioden

$$(18.) \qquad a_{\lambda\alpha}, \quad b_{\lambda\alpha} \qquad\qquad (\lambda=1,\dots \varrho;\ \alpha=1,\dots 2\varrho)$$

ergänzen, das diesen Bedingungen genügt, falls in ihnen σ durch 2ϱ ersetzt wird, und, wie die Analyse des Problems zeigt, erhält man auf diese Weise alle Systeme von Grössen, welche die verlangten Eigenschaften haben.

§ 5.

Die bilineare Form $\sum k_{\alpha\beta}x_\alpha x'_\beta$.

Genügt die Function $\varphi(u_1,\dots u_\varrho)$ den Bedingungen (1.) § 1, sind $s_{\varkappa\lambda}=s_{\lambda\varkappa}$, r_λ und q Constanten und ist

$$E[-\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} s_{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda - \sum_\lambda r_\lambda u_\lambda - q]\,\varphi(u_1,\ \dots\ u_\varrho) = \psi(u_1,\ \dots\ u_\varrho),$$

so ist

$$\psi(u_1+a_{1\alpha},\ \dots\ u_\varrho+a_{\varrho\alpha}) = E[c'_\alpha + \sum_\lambda b'_{\lambda\alpha}(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_{\lambda\alpha})]\,\psi(u_1,\ \dots\ u_\varrho),$$

wo

$$(1.) \qquad b'_{\lambda\alpha} = b_{\lambda\alpha} - \sum_\varkappa s_{\lambda\varkappa}a_{\varkappa\alpha}, \qquad c'_\alpha = c_\alpha - \sum_\lambda r_\lambda a_{\lambda\alpha}$$

ist. Daher ist

$$k'_{\alpha\beta} = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b'_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b'_{\lambda\alpha}) = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) - \sum_{\varkappa,\lambda} s_{\lambda\varkappa} a_{\lambda\alpha} a_{\varkappa\beta} + \sum_{\varkappa,\lambda} s_{\lambda\varkappa} a_{\varkappa\alpha} a_{\lambda\beta} = k_{\alpha\beta},$$

da die beiden letzten Summen einander gleich sind*).

Geht zweitens $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ durch eine lineare Substitution

$$u_\varkappa = h_\varkappa + \sum_\lambda h_{\varkappa\lambda} v_\lambda,$$

wo die Determinante ϱ^{ten} Grades $h_{\varkappa\lambda}$ von Null verschieden ist, in $\psi(v_1, \dots v_\varrho)$ über, so ergiebt sich aus den Gleichungen (1.) § 1.

$$\psi(v_1 + a'_{1\alpha}, \dots v_\varrho + a'_{\varrho\alpha}) = E[c'_\alpha + \sum_\lambda b'_{\lambda\alpha}(v_\lambda + \tfrac{1}{2} a'_{\lambda\alpha})]\, \psi(v_1, \dots v_\varrho),$$

falls

$$(2.) \qquad a_{\varkappa\alpha} = \sum_\lambda h_{\varkappa\lambda} a'_{\lambda\alpha}, \quad b'_{\varkappa\alpha} = \sum_\lambda h_{\lambda\varkappa} b_{\lambda\alpha}, \quad c'_\alpha = c_\alpha + \sum_\lambda h_\lambda b_{\lambda\alpha},$$

ist. Mithin ist

$$k'_{\alpha\beta} = \sum_\varkappa (a'_{\varkappa\alpha} b'_{\varkappa\beta} - a'_{\varkappa\beta} b'_{\varkappa\alpha}) = \sum_{\varkappa,\lambda} (a'_{\varkappa\alpha} h_{\lambda\varkappa} b_{\lambda\beta} - a'_{\varkappa\beta} h_{\lambda\varkappa} b_{\lambda\alpha}) = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) = k_{\alpha\beta}.$$

Bei den beiden eben ausgeführten Umformungen bleiben also die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ ungeändert, und folglich auch die Form $\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$, welche ich die der Function φ *zugehörige alternirende bilineare Form* nenne.

Sind $g_{\alpha\beta}$ σ^2 ganze Zahlen und ist

$$a'_{\lambda\alpha} = \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha},$$

so sind auch $a'_{\lambda\alpha}$ σ Perioden der Function φ, und nach Formel (8.) § 1. sind

$$b'_{\lambda\alpha} = \sum_\gamma b_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha}$$

die ihnen entsprechenden Perioden zweiter Gattung. Die diesen Perioden zugehörigen ganzen Zahlen $k'_{\alpha\beta}$ sind

$$k'_{\alpha\beta} = \sum_\lambda (a'_{\lambda\alpha} b'_{\lambda\beta} - a'_{\lambda\beta} b'_{\lambda\alpha}) = \sum_{\lambda,\gamma,\delta} (a_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha} b_{\lambda\delta} g_{\delta\beta} - a_{\lambda\delta} g_{\delta\beta} b_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha})$$

$$= \sum_{\gamma,\delta} g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} (\sum_\lambda a_{\lambda\gamma} b_{\lambda\delta} - a_{\lambda\delta} b_{\lambda\gamma}) = \sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta} g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta}.$$

Ist daher

$$x_\gamma = \sum_\alpha g_{\gamma\alpha} y_\alpha, \quad x'_\gamma = \sum_\alpha g_{\gamma\alpha} y'_\alpha,$$

so ist

$$\sum_{\alpha,\beta} k'_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta = \sum_{\gamma,\delta} k_{\gamma\delta} x_\gamma x'_\delta.$$

Daher ist die bilineare Form $\sum k'_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta$ unter der Form $\sum k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ enthalten.

*) Haben allgemeiner zwei Functionen dieselben Perioden erster Gattung, so hat auch ihr Product dieselben Perioden. Die dieser Function zugehörige bilineare Form ist die Summe der den beiden gegebenen Functionen zugehörigen. Daraus ergiebt sich das obige Resultat mittelst der Bemerkung, dass die einer *Jacobi*schen Function nullter Ordnung zugehörige bilineare Form identisch verschwindet.

(Vgl. dieses Journal Bd. 86, S. 165; Bd. 88, S. 114.) Ist speciell die Determinante σ^{ten} Grades $|g_{\alpha\beta}| = \pm 1$, lassen sich also nicht nur die Perioden $a'_{\lambda\alpha}$ aus den Perioden $a_{\lambda\alpha}$, sondern auch diese aus jenen zusammensetzen, so sind die beiden bilinearen Formen äquivalent. Sind folglich die Perioden der Function φ noch nicht in bestimmter Weise gewählt, so gehört ihr nicht eine bestimmte alternirende Form, sondern eine ganze ***Klasse äquivalenter Formen*** zu, und man kann die Perioden so wählen, dass der Function φ eine beliebig gegebene Form dieser Klasse zugehört.

§ 6.

*Jacobi*sche Functionen vom Range ϱ.

Ich wende mich jetzt zu einer genaueren Untersuchung der *Jacobi*schen Functionen, die $\sigma = 2\varrho$ unabhängige Perioden haben. Setzt man $b_{\lambda\alpha} = a_{\varrho+\lambda,\alpha}$, so besagen die Relationen *A.*, dass die alternirende bilineare Form $\sum_{\lambda}^{\varrho}(y_\lambda y'_{\varrho+\lambda} - y_{\varrho+\lambda} y'_\lambda)$ durch die cogredienten Substitutionen

$$(1.)\qquad y_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} x_\alpha, \quad y'_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} x'_\alpha \qquad (\gamma = 1, \dots 2\varrho)$$

in die Form $\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ übergeht. Daher ist (dieses Journal Bd. 86, S. 50) die *Pfaff*sche Function der letzteren, die ich mit $|k_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}}$ bezeichne, gleich der *Pfaff*schen Function der ersteren, die gleich $+1$ ist, multiplicirt mit der Substitutionsdeterminante, also

$$(2.)\qquad |a_{\alpha\beta}| = |k_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} = \pm l,$$

wo l eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist.

VII. ***Die aus den Perioden erster und zweiter Gattung einer Jacobischen Function gebildete Determinante $2\varrho^{\text{ten}}$ Grades ist stets eine von Null verschiedene ganze Zahl, deren absoluter Werth die Ordnung der Jacobischen Function genannt wird.***

VIII. ***Die Determinante der einer Jacobischen Function zugehörigen alternirenden bilinearen Form ist gleich dem Quadrate der Ordnung der Function.***

Die Bedingungen *A.* und *B.* lassen sich für *Jacobi*sche Functionen auf eine andere Form bringen, zu deren Entwickelung ich jetzt übergehe (vgl. das Citat aus den Untersuchungen des Herrn *Weierstrass,* dieses Journal Bd. 94, S. 9). In der Determinante $|k_{\alpha\beta}|$ sei

$$(3.)\qquad l_{\alpha\beta} = -l_{\beta\alpha}$$

die dem Elemente $k_{\alpha\beta}$ entsprechende Unterdeterminante. Ist dann

$$X_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta, \quad X'_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} x'_\beta,$$

so ist

$$l^2 x_\beta = \sum_\alpha l_{\alpha\beta} X_\alpha,$$

und daher nach (1.)

$$\sum_\lambda (y_\lambda y'_{\varrho+\lambda} - y_{\varrho+\lambda} y'_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta} k_{\beta\alpha} x_\beta x'_\alpha = \sum_\beta x_\beta X'_\beta = \frac{1}{l^2} \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} X_\alpha X'_\beta.$$

Nun ist aber

$$X_\alpha = \sum_{\lambda,\beta} (a_{\lambda\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - a_{\lambda\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}) x_\beta = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} y_{\varrho+\lambda} - a_{\varrho+\lambda,\alpha} y_\lambda).$$

Die Function $\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} X_\alpha X'_\beta$ geht daher durch die Substitutionen

$$X_\alpha = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} y_{\varrho+\lambda} - b_{\lambda\alpha} y_\lambda), \quad X'_\alpha = \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} y'_{\varrho+\lambda} - b_{\lambda\alpha} y'_\lambda)$$

in $l^2 \sum_\lambda (y_\lambda y'_{\varrho+\lambda} - y_{\varrho+\lambda} y'_\lambda)$ über, und mithin ist

$$(A'.) \quad \begin{cases} \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\varkappa\alpha} a_{\lambda\beta} = 0, \quad \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} b_{\varkappa\alpha} b_{\lambda\beta} = 0, \\ \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} = l^2, \quad \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\varkappa\alpha} b_{\lambda\beta} = 0, \\ |l_{\alpha\beta}| = l^{4\varrho-2}. \end{cases} \qquad (\varkappa \gtrless \lambda)$$

Nach dem Satze *B.* ist der Ausdruck $i\sum_\lambda (\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} z_\alpha^{(1)})(\sum_\beta b_{\lambda\beta} z_\beta)$ positiv, wenn zwischen den 2ϱ Variabeln z_α die ϱ Gleichungen $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} z_\alpha = 0$ bestehen. Sind nun x_λ $(\lambda = 1, \dots \varrho)$ ϱ unabhängige Variabeln, so kann man, da die Determinante l von Null verschieden ist, die 2ϱ Grössen z_α immer so bestimmen, dass sie den Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} z_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha b_{\lambda\alpha} z_\alpha = x_\lambda$$

genügen. Setzt man nun $A_\alpha = \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} x_\lambda$, so ist

$$A_\alpha = \sum_{\lambda,\beta} a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} z_\beta = \sum_{\lambda,\beta} (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) z_\beta = \sum_\beta k_{\alpha\beta} z_\beta$$

und mithin

$$l^2 z_\beta = \sum_\alpha l_{\alpha\beta} A_\alpha, \quad l^2 z_\beta^{(1)} = \sum_\alpha l_{\alpha\beta} A_\alpha^{(1)}.$$

Daher ist der Ausdruck

$$i\sum_\lambda (\sum_\beta a_{\lambda\beta} z_\beta^{(1)})(\sum_\alpha b_{\lambda\alpha} z_\alpha) = i\sum_{\lambda,\beta} a_{\lambda\beta} z_\beta^{(1)} x_\lambda = i\sum_\beta A_\beta z_\beta^{(1)} = \frac{i}{l^2} \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_\alpha^{(1)} A_\beta$$

für alle Werthe der Variabeln x_λ positiv und verschwindet nur, wenn diese Variabeln sämmtlich Null sind. (Vgl. dieses Journal Bd. 95, S. 266.)

B'. *Ist*

$$(4.) \qquad A_\alpha = \sum_\lambda a_{\lambda\alpha} x_\lambda$$

so ist der Ausdruck

$$(5.)\quad i\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_\alpha^{(0)} A_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda}\big(i\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\varkappa\alpha}^{(0)} a_{\lambda\beta}\big) x_\varkappa^{(0)} x_\lambda$$

eine positive Form der ϱ conjugirt complexen Variabelnpaare x_λ, $x_\lambda^{(0)}$.

Ist $i\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\varkappa\alpha}^{(0)} a_{\lambda\beta} = C_{\varkappa\lambda}$, so sind in der Form $\sum_{\varkappa,\lambda} C_{\varkappa\lambda} x_\varkappa^{(0)} x_\lambda$ die conjugirten Coefficienten $C_{\varkappa\lambda}$ und $C_{\lambda\varkappa}$ conjugirt complexe Grössen.

Die Sätze *A'.* und *B'.* sind den Sätzen *A.* und *B.* völlig äquivalent. Denn nach (3.) ist $\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = 0$ und daher $\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} A_\alpha^{(0)} A_\beta = \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta}(A_\alpha + A_\alpha^{(0)}) A_\beta$. Nach *B'.* können folglich die 2ϱ Ausdrücke $\sum_\alpha l_{\alpha\beta}(A_\alpha + A_\alpha^{(0)})$ nur verschwinden, wenn die Variabeln $x_\lambda = 0$ sind. Ist also $a_{\lambda\alpha} = p_{\lambda\alpha} + ip_{\varrho+\lambda,\alpha}$, $x_\lambda = \xi_\lambda - i\xi_{\varrho+\lambda}$, so folgt aus den 2ϱ Gleichungen $\sum_\alpha l_{\alpha\beta}(\sum_\gamma p_{\gamma\alpha}\xi_\gamma) = 0$, dass die 2ϱ Variabeln ξ_γ verschwinden, und mithin sind die Determinanten $|p_{\alpha\beta}|$ und $|l_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden. Ferner ist den Gleichungen *A'.* zufolge das Product aus der Determinante $|l_{\alpha\beta}| = l^{2\varrho-2}$ in das Quadrat der Determinante $2\varrho^{\text{ten}}$ Grades $|a_{\alpha\beta}|$ gleich $l^{2\varrho}$, und folglich kann auch die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ nicht verschwinden. Nun braucht man nur die Entwicklungen dieses Paragraphen in umgekehrter Reihenfolge zu durchlaufen, um aus den Bedingungen *A'.* und *B'.* wieder die Bedingungen *A.* und *B.* zu erhalten.

Die Perioden $a_{\lambda\alpha}$ kann man so wählen, dass an die Stelle der Form $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ irgend eine ihr äquivalente Form tritt. Nun giebt es (dieses Journal Bd. 86, S. 167) in jeder Klasse eine Form von der Gestalt

$$(6.)\quad \sum_\lambda k_\lambda (x_\lambda x'_{\varrho+\lambda} - x_{\varrho+\lambda} x'_\lambda),$$

wo

$$(7.)\quad l = \pm k_1 k_2 \dots k_\varrho$$

ist. Die Potenzen der verschiedenen Primfactoren, in welche sich die Zahlen k_λ zerlegen lassen, sind völlig bestimmt und mögen die *einfachen Elementartheiler der Ordnung l* heissen. Die ϱ Grössen k_λ heissen ein *System zusammengesetzter Elementartheiler* oder kurz *Elementartheiler von l**). Man kann sie, und zwar nur auf eine Art, so wählen, dass jede von ihnen in der folgenden aufgeht**).

*) Eine Thetafunction k^{ten} Grades ist eine *Jacobi*sche Function, deren Ordnung k^ϱ in ϱ gleiche Elementartheiler k zerfällt.

**) Ist $l_\varrho = |k_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}}$, $l_{\varrho-1}$ der grösste gemeinsame Divisor der ersten partiellen Ableitungen dieser *Pfaff*schen Function nach den einzelnen Elementen $k_{\alpha\beta}$, $l_{\varrho-2}$ der grösste gemeinsame Divisor ihrer zweiten Ableitungen u. s. w., so ist $k_\varrho = \frac{l_\varrho}{l_{\varrho-1}}$, $k_{\varrho-1} = \frac{l_{\varrho-1}}{l_{\varrho-2}}$ u. s. w. Die so definirte Zahl k_λ nenne ich die λ^{te} *Invariante* der Form $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$.

Zwischen den Perioden, denen die Form (6.) zugehört, bestehen die Relationen

$$A. \quad \sum_\lambda (a_{\lambda\gamma} b_{\lambda,\varrho+\gamma} - a_{\lambda,\varrho+\gamma} b_{\lambda\gamma}) = k_\gamma, \quad \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) = 0 \quad (\alpha - \beta \neq \pm\varrho).$$

Ein solches Periodensystem nenne ich ein *normales*. Da für dasselbe

$$l_{\gamma,\varrho+\gamma} = \frac{k}{k_\gamma}, \quad l_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha-\beta \neq \pm\varrho)$$

ist, so ist ferner

$$A'. \quad \begin{cases} \sum_\gamma \frac{1}{k_\gamma} (a_{\varkappa\gamma} a_{\lambda,\varrho+\gamma} - a_{\varkappa,\varrho+\gamma} a_{\lambda\gamma}) = 0, & \sum_\gamma \frac{1}{k_\gamma} (b_{\varkappa\gamma} b_{\lambda,\varrho+\gamma} - b_{\varkappa,\varrho+\gamma} b_{\lambda\gamma}) = 0, \\ \sum_\gamma \frac{1}{k_\gamma} (a_{\lambda\gamma} b_{\lambda,\varrho+\gamma} - a_{\lambda,\varrho+\gamma} b_{\lambda\gamma}) = 1, & \sum_\gamma \frac{1}{k_\gamma} (a_{\varkappa\gamma} b_{\lambda,\varrho+\gamma} - a_{\varkappa,\varrho+\gamma} b_{\lambda\gamma}) = 0 \quad (\varkappa \neq \lambda). \end{cases}$$

Endlich ist, falls A_α dieselbe Bedeutung wie oben hat, der Ausdruck

$$B'. \quad i \sum_\gamma \frac{1}{k_\gamma} (A^{(0)}_\gamma A_{\varrho+\gamma} - A^{(0)}_{\varrho+\gamma} A_\gamma)$$

eine positive Form. Nach Satz V. folgt aus A'., dass die Determinante ϱ^{ten} Grades $|a_{\varkappa\lambda}|$ $(\varkappa, \lambda = 1, \dots \varrho)$ von Null verschieden ist, und ebenso jede Determinante ϱ^{ten} Grades $|a_{\lambda\alpha}|$, falls α solche ϱ der Zahlen 1, 2, ... 2ϱ durchläuft, von denen keine zwei um ϱ verschieden sind. Dieselbe Folgerung lässt sich auch leicht aus den Bedingungen B'. ableiten.

§ 7.

Die Ungleichheiten B. und B'.

Man kann in mannigfacher Art ϱ Ungleichheiten angeben, die nothwendig und hinreichend sind, damit die Form (4.), § 2 unter den Bedingungen (1.), § 2 oder die Form (5.), § 6 eine positive sei. Besonders einfach ist das folgende Kriterium:

IX. *Ist*

$$L_\lambda = i^{-\lambda} |a_{1\alpha}, \dots a_{\varrho\alpha}, \quad a^{(0)}_{1\alpha}, \dots a^{(0)}_{\lambda\alpha}, \quad b_{\lambda+1,\alpha}, \dots b_{\varrho\alpha}|,$$

so ist erforderlich und genügend, dass die $\varrho+1$ *reellen Grössen* $L_0, L_1, \dots L_\varrho$ *von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben.*

Ist μ eine der Zahlen von 1 bis ϱ, so muss für die Lösungen der $2\varrho-1$ Gleichungen

$$(1.) \quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0 \ (\lambda = 1, \dots \varrho), \quad \sum_\alpha a^{(0)}_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0 \ (\lambda = 1, \dots \mu-1), \quad \sum_\alpha b_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0 \ (\lambda = \mu+1, \dots \varrho)$$

der Ausdruck (4.), § 2 positiv sein. Da sich derselbe für diesen Fall auf

$i(\sum_\alpha a_{\mu\alpha} x_\alpha^{(\mu)})(\sum_\beta b_{\mu\beta} x_\beta)$ reducirt, so ist folglich, wenn

$$(2.)\qquad -i\sum_\alpha a_{\mu\alpha}^{(\mu)} x_\alpha = p^{(\mu)},\quad \sum_\alpha b_{\mu\alpha} x_\alpha = q$$

gesetzt wird, pq positiv, also sind p und q von Null verschieden. Daher kann keine der beiden Determinanten L_μ und $L_{\mu-1}$ verschwinden, weil sonst für jede Lösung der Gleichungen (1.) auch $p^{(\mu)} = 0$ oder $q = 0$ wäre. Aus (1.) und (2.) ergiebt sich

$$(3.)\qquad L_\mu q = L_{\mu-1} p^{(\mu)},$$

und mithin ist

$$\frac{L_\mu}{L_{\mu-1}} = \frac{p^{(\mu)}}{q} = \frac{p p^{(\mu)}}{pq}$$

reell und positiv. Da $L_0 = \varepsilon l$ nach (2.) reell ist, so sind auch $L_1, \dots L_\varrho$ reell und von Null verschieden und haben das Vorzeichen ε. Die nämlichen Eigenschaften haben alle Determinanten, welche aus

$$|a_{1\alpha}, \dots a_{\varrho\alpha},\quad b_{1\alpha}, \dots b_{\varrho\alpha}| = \varepsilon l$$

hervorgehen, wenn irgend welche der letzten ϱ Colonnen durch die entsprechenden Colonnen der Determinante

$$|a_{1\alpha}, \dots a_{\varrho\alpha},\quad -ia_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots -ia_{\varrho\alpha}^{(\mu)}|$$

ersetzt werden, d. h. alle Coefficienten der Function

$$(4.)\qquad |a_{1\alpha}, \dots a_{\varrho\alpha},\quad b_{1\alpha} - ia_{1\alpha}^{(\mu)} u_1, \dots b_{\varrho\alpha} - ia_{\varrho\alpha}^{(\mu)} u_\varrho|.$$

Demnach sind die in dem oben aufgestellten Satze angegebenen Bedingungen nothwendig.

Ich nehme jetzt an, dieselben seien erfüllt. Da L_μ von Null verschieden ist, so haben die Gleichungen (1.), von einem constanten Factor abgesehen, nur eine Lösung, die ich mit $x_\alpha = x_{\alpha\mu}$ bezeichne. Dann ist

$$(5.)\qquad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_{\alpha\mu} = 0 \;(\lambda,\mu = 1,\dots\varrho),\quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_{\alpha\mu}^{(\mu)} = 0 \;(\lambda < \mu),\quad \sum_\alpha b_{\lambda\alpha} x_{\alpha\mu} = 0 \;(\lambda > \mu).$$

Da L_λ und $L_{\lambda-1}$ nicht verschwinden, so sind auch

$$i\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_{\alpha\lambda}^{(\mu)} = p_\lambda,\quad \sum_\alpha b_{\lambda\alpha} x_{\alpha\lambda} = q_\lambda$$

von Null verschieden, und da L_λ und $L_{\lambda-1}$ dasselbe Vorzeichen haben, so ist $p_\lambda q_\lambda$ nach (3.) positiv.

Die ϱ Lösungen $x_{\alpha\mu}$ der Gleichungen (1.), § 2 sind von einander unabhängig. Denn ist $\sum_\mu g_\mu x_{\alpha\mu} = 0$, so erhält man durch Addition der $\varrho-1$ Gleichungen $g_\mu \sum_\alpha a_{1\alpha}^{(\mu)} x_{\alpha\mu} = 0$ $(\mu = 2, \dots \varrho)$ die Gleichung $g_1 p_1^{(\mu)} = 0$ und folglich $g_1 = 0$. Ebenso zeigt man, dass der Reihe nach $g_2, \dots g_\varrho$ verschwinden.

Da L_0 von Null verschieden ist, so sind die ϱ Gleichungen (1.), § 2 unabhängig, haben also nicht mehr als ϱ unabhängige Lösungen. Sind daher $z_1, \dots z_\varrho$ Variable, so ist $x_\alpha = \sum\limits_\mu x_{\alpha\mu} z_\mu$ ihre allgemeinste Lösung, und folglich ist

$$i\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta = i\Sigma k_{\alpha\beta} x_{\alpha\mu}^{(0)} z_\mu^{(0)} x_{\beta\nu} z_\nu,$$

oder wenn man

$$i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_{\alpha\mu}^{(0)} x_{\beta\nu} = h_{\mu\nu}$$

setzt,

$$i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta = \sum_{\mu,\nu} h_{\mu\nu} z_\mu^{(0)} z_\nu.$$

Ist $\mu > \nu$, so ist

$$h_{\mu\nu} = i\sum_{\lambda,\alpha,\beta} (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) x_{\alpha\mu}^{(0)} x_{\beta\nu} = i\sum_\lambda (\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_{\alpha\mu}^{(0)})(\sum_\beta b_{\lambda\beta} x_{\beta\nu}) = 0,$$

weil nach (5.) in jedem Gliede der Summe (nach λ) mindestens einer der beiden Factoren verschwindet. Ist $\mu < \nu$, so ist $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}^{(0)} = 0$. Ferner ist

$$h_{\mu\mu} = i\sum_\lambda (\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_{\alpha\mu}^{(0)})(\sum_\beta b_{\lambda\beta} x_{\beta\mu}) = i(\sum_\alpha a_{\mu\alpha} x_{\alpha\mu}^{(0)})(\sum_\beta b_{\mu\beta} x_{\beta\mu}) = p_\mu q_\mu,$$

und folglich ist

$$i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha^{(0)} x_\beta = \sum_\lambda p_\lambda q_\lambda z_\lambda^{(0)} z_\lambda$$

eine positive Form der Variabelnpaare z_λ, $z_\lambda^{(0)}$.

Multiplicirt man die Determinante (4.) mit

$$|b_{1\alpha}, \dots b_{\varrho\alpha}, \; -a_{1\alpha}, \dots -a_{\varrho\alpha}| = \varepsilon l,$$

so erhält man

$$(6.) \qquad |k_{\alpha\beta} + i\sum_\lambda a_{\lambda\alpha}^{(0)} a_{\lambda\beta} u_\lambda|$$

oder, wenn man $u_\lambda = \frac{1}{v_\lambda}$ setzt,

$$(7.) \qquad i^{-\varrho} \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1,2\varrho} & a_{11} & \dots & a_{\varrho 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{2\varrho,1} & \dots & k_{2\varrho,2\varrho} & a_{1,2\varrho} & \dots & a_{\varrho,2\varrho} \\ a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1,2\varrho}^{(0)} & iv_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1}^{(0)} & \dots & a_{\varrho,2\varrho}^{(0)} & 0 & \dots & iv_\varrho \end{vmatrix}.$$

Alle Coefficienten der Function (6.) oder (7.) sind also positiv, und dazu ist nothwendig und hinreichend, dass für $\lambda = 1, \dots \varrho$ die Determinante

$$(8.) \qquad i^{-\lambda} \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1,2\varrho} & a_{11} & \dots & a_{\lambda 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{2\varrho,1} & \dots & k_{2\varrho,2\varrho} & a_{1,2\varrho} & \dots & a_{\lambda,2\varrho} \\ a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1,2\varrho}^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda 1}^{(0)} & \dots & a_{\lambda,2\varrho}^{(0)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

positiv ist. Ist, wie in § 6

$$C_{\mu\nu} = i\sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a^{(0)}_{\mu\alpha} a_{\nu\beta},$$

so ist der Ausdruck (8.) gleich

$$\frac{1}{l^{2\lambda-2}} |C_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, \dots \lambda)$$

und der Ausdruck (7.) gleich

$$\frac{1}{l^{2\varrho-2}} |C_{\mu\nu} + l^2 v_\nu e_{\mu\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, \dots \varrho),$$

wo $e_{\mu\nu} = 1$ oder 0 ist, je nachdem μ und ν gleich oder verschieden sind. (Vgl. dieses Journal Bd. 86, S. 54.)

§ 8.

Bestimmung von Functionen mit vorgeschriebenen Perioden.

Damit eine alternirende bilineare Form $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ unter einer anderen $\Sigma k'_{\alpha\beta} X_\alpha X'_\beta$ enthalten sei, ist nothwendig und hinreichend, dass jede Invariante der ersten durch die entsprechende der zweiten theilbar ist (dieses Journal Bd. 86, S. 165; Bd. 88, S. 114). Daher ist jede Form $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ unter der Form $\Sigma(X_\lambda X'_{\varrho+\lambda} - X_{\varrho+\lambda} X'_\lambda)$ enthalten, deren Invarianten gleich 1 sind. Sind $X_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} x_\beta$, $X'_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} X'_\beta$ die Substitutionen*), welche diese Form in jene transformiren, so ist

$$(1.) \qquad k_{\alpha\beta} = \sum_\lambda (g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} - g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\alpha}),$$

und die Substitutionsdeterminante ist

$$(2.) \qquad |g_{\alpha\beta}| = |k_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} = \pm l.$$

Ist G das System der 2ϱ linearen Formen

$$(3.) \qquad X_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} x_\beta,$$

so heisst das System der 2ϱ ganzen Zahlen X_α *congruent* 0 (mod. G), wenn die ihnen entsprechenden Grössen x_β ganze Zahlen sind. Zwei Systeme von je 2ϱ Zahlen Y_α und Z_α heissen ferner congruent (mod. G), wenn das System $Y_\alpha - Z_\alpha = X_\alpha$ congruent 0 ist. Die Anzahl der (mod. G) incongruenten Zahlensysteme ist l. (Dieses Journal Bd. 86, S. 175.)

Setzt man

$$(4.) \qquad a_{\lambda\alpha} = \sum_\gamma A_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha}, \quad b_{\lambda\alpha} = \sum_\gamma B_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha}, \quad c_\alpha = \sum_\gamma C_\gamma g_{\gamma\alpha} + \tfrac{1}{2} \sum_\varkappa g_{\varkappa\alpha} g_{\varrho+\varkappa,\alpha},$$

---

*) Ist das Periodensystem $a_{\lambda\alpha}$ ein normales, so kann man $g_{\lambda\lambda} = k_\lambda$, $g_{\varrho+\lambda,\varrho+\lambda} = 1$ und, wenn α von β verschieden ist, $g_{\alpha\beta} = 0$ setzen.

so ist

$$(5.)\qquad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}x_\alpha = \sum_\alpha A_{\lambda\alpha}X_\alpha,\quad \sum_\alpha b_{\lambda\alpha}x_\alpha = \sum_\alpha B_{\lambda\alpha}X_\alpha$$

und daher

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}x_\alpha x'_\beta = \sum_\lambda((\sum_\alpha a_{\lambda\alpha}x_\alpha)(\sum_\beta b_{\lambda\beta}x'_\beta)-(\sum_\beta a_{\lambda\beta}x'_\beta)(\sum_\alpha b_{\lambda\alpha}x_\alpha))$$
$$= \sum_\lambda((\sum_\alpha A_{\lambda\alpha}X_\alpha)(\sum_\beta B_{\lambda\beta}X'_\beta)-(\sum_\beta A_{\lambda\beta}X'_\beta)(\sum_\alpha B_{\lambda\alpha}X_\alpha))$$
$$= \sum_{\lambda,\alpha,\beta}(A_{\lambda\alpha}B_{\lambda\beta}-A_{\lambda\beta}B_{\lambda\alpha})X_\alpha X'_\beta.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$(6.)\qquad \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}x_\alpha x'_\beta = \sum_\lambda (X_\lambda X'_{\varrho+\lambda}-X_{\varrho+\lambda}X'_\lambda) = \sum_{\alpha,\beta} i_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta,$$

wo $i_{\lambda,\varrho+\lambda} = 1$, $i_{\varrho+\lambda,\lambda} = -1$ und $i_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha-\beta$ nicht gleich $\pm\varrho$ ist. Mithin ist

$$(7.)\qquad \sum_\lambda(A_{\lambda\alpha}B_{\lambda\beta}-A_{\lambda\beta}B_{\lambda\alpha}) = i_{\alpha\beta},$$

oder wenn p_α, p'_α ganze Zahlen sind und

$$A_\lambda = \sum_\alpha A_{\lambda\alpha}p_\alpha,\quad B_\lambda = \sum_\alpha B_{\lambda\alpha}p_\alpha,\quad C = \sum_\alpha C_\alpha p_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_x p_x p_{\varrho+x},$$
$$A'_\lambda = \sum_\alpha A_{\lambda\alpha}p'_\alpha,\quad B'_\lambda = \sum_\alpha B_{\lambda\alpha}p'_\alpha,\quad C' = \sum_\alpha C_\alpha p'_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_x p'_x p'_{\varrho+x}$$

gesetzt wird,

$$(8.)\qquad \sum(A_\lambda B'_\lambda - B_\lambda A'_\lambda) = \sum(p_x p'_{\varrho+x}-p_{\varrho+x}p'_x).$$

Da unter den Bedingungen $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha}x_\alpha = 0$ die Form $i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}x_\alpha^{(0)}x_\beta$ eine positive ist, so ist nach (5.) und (6.) auch unter den Bedingungen $\sum_\alpha A_{\lambda\alpha}X_\alpha = 0$ die Form $i\sum_\lambda(X_\lambda^{(0)}X_{\varrho+\lambda}-X_{\varrho+\lambda}^{(0)}X_\lambda)$ eine positive. In derselben Weise wie in § 6 aus den Sätzen *A.* und *B.* die Sätze *A'.* und *B'.* hergeleitet sind, folgt daraus, dass

$$(9.)\qquad i\sum_{x,\lambda,\nu}(A_{x\nu}^{(0)}A_{\lambda,\varrho+\nu}-A_{x,\varrho+\nu}^{(0)}A_{\lambda\nu})x_x^{(0)}x_\lambda$$

eine positive Form der ϱ Variabelnpaare x_λ, $x_\lambda^{(0)}$ ist. Mit Hülfe der in § 5 entwickelten Umformungen und der Theorie der Thetareihen kann man aber bekanntlich zeigen, dass es stets eine und, abgesehen von einem constanten Factor, nur eine *Jacobi*sche Function (erster Ordnung) giebt, welche Grössen $A_{\lambda\alpha}$, $B_{\lambda\alpha}$, die den Bedingungen (7.) und (9.) genügen, zu Perioden erster und zweiter Gattung hat und beliebig vorgeschriebene Parameter C_α besitzt. Dieselbe bezeichne ich mit $\Theta(u_1,\dots u_\varrho;\ C_1,\dots C_{2\varrho})$ oder einfacher mit $\Theta(u_\lambda, C_\alpha)$.

Bezeichnet man die Function $\varphi(u_1,\dots u_\varrho)$ kurz mit $\varphi(u_\lambda)$, und setzt man *)

---

*) Die folgende Entwicklung ist den Untersuchungen des Herrn *Weierstrass* über die Thetafunctionen nachgebildet, die von Herrn *Schottky* in seiner Schrift *Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln* mitgetheilt sind.

$$\varphi(u_\lambda+A_\lambda)E[-C-\Sigma B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)] = \varphi(u_1, \dots u_\varrho;\ p_1, \dots p_{2\varrho}) = \varphi(u_\lambda, p_\alpha),$$

so ergiebt sich mittelst der Gleichung (8.)

$$(10.)\qquad \varphi(u_\lambda+A_\lambda,\ p'_\alpha) = E[C+\Sigma B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)]\varphi(u_\lambda,\ p_\alpha+p'_\alpha).$$

Ist das Zahlensystem $p_\alpha \equiv 0$ (mod. G), ist also

$$p_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta} n_\beta,$$

so ist, wenn man

$$(11.)\qquad a_\lambda = \sum_\alpha a_{\lambda\alpha} n_\alpha,\quad b_\lambda = \sum_\alpha b_{\lambda\alpha} n_\alpha,\quad c = \sum_\alpha c_\alpha n_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$$

setzt,

$$(12.)\qquad A_\lambda = a_\lambda,\quad B_\lambda = b_\lambda,\quad C = c+g,$$

wo

$$2g = \sum_\lambda p_\lambda p_{\varrho+\lambda} - \sum_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta - \sum_{\lambda,\alpha} g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\alpha} n_\alpha$$

ist. Nach (1.) ist

$$\sum_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \sum_\lambda \sum_{\alpha,\beta}' (g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} - g_{\varrho+\lambda,\alpha} g_{\lambda\beta}) n_\alpha n_\beta$$
$$\equiv \sum_\lambda \sum_{\alpha,\beta}' (g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} + g_{\varrho+\lambda,\alpha} g_{\lambda\beta}) n_\alpha n_\beta \quad (\text{mod. } 2)$$

und mithin

$$\sum_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_{\lambda,\alpha} g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\alpha} n_\alpha$$
$$\equiv \sum_\lambda \Big(\sum_{\alpha<\beta} g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_{\alpha>\beta} g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\alpha} n_\alpha^2\Big)$$
$$= \sum_\lambda \sum_{\alpha,\beta} g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} n_\alpha n_\beta = \sum_\lambda p_\lambda p_{\varrho+\lambda},$$

und folglich ist g eine ganze Zahl. Nun ist nach Gleichung (6.), § 1

$$\varphi(u_\lambda+a_\lambda,\ p'_\alpha) = \varphi(u_\lambda+A'_\lambda+a_\lambda)E[-C'-\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+a_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)]$$
$$= \varphi(u_\lambda+A'_\lambda)E[c+\Sigma b_\lambda(u_\lambda+A'_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)-C'-\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+a_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)]$$

und demnach, weil

$$\Sigma(a_\lambda B'_\lambda - b_\lambda A'_\lambda) = \Sigma(A_\lambda B'_\lambda - B_\lambda A'_\lambda)$$

eine ganze Zahl ist,

$$(13.)\qquad \varphi(u_\lambda+a_\lambda,\ p'_\alpha) = E[c+\Sigma b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)]\varphi(u_\lambda,\ p'_\alpha).$$

Nennt man also zwei *Jacobi*sche Functionen, welche dieselben Perioden und Parameter haben, *gleichändrig* (in Bezug auf das betrachtete System von Perioden), so sind die Functionen $\varphi(u_\lambda, p_\alpha)$ und $\varphi(u_\lambda)$ gleichändrig. Aus den Gleichungen (10.), (12.) und (13.) folgt, dass $\varphi(u_\lambda, p_\alpha+p'_\alpha) = \varphi(u_\lambda, p'_\alpha)$ ist, wenn $p_\alpha \equiv 0$ (mod. G) ist. Die Function $\varphi(u_\lambda, p_\alpha)$ bleibt also ungeändert, wenn die Zahlen p_α durch congruente (mod. G) ersetzt werden.

Seien nun n_β ganze Zahlen, N_α die durch die Gleichungen

$$n_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} N_\alpha$$

bestimmten rationalen Zahlen und

$$\sum_{p_1,\dots p_{2\varrho}} E[-\sum_\alpha p_\alpha N_\alpha]\,\varphi(u_\lambda, p_\alpha) = \psi(u_\lambda),$$

wo das Zahlensystem p_α irgend ein vollständiges Restsystem (mod. G) durchläuft. Dann ist nach (10.)

$$\psi(u_\lambda+A'_\lambda) = E[C'+\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)]\,\Sigma E[-\sum_\alpha p_\alpha N_\alpha]\,\varphi(u_\lambda, p_\alpha+p'_\alpha),$$

also, wenn man p_α durch $p_\alpha-p'_\alpha$ ersetzt,

$$\psi(u_\lambda+A'_\lambda) = E[C'+\Sigma N_\alpha p'_\alpha+\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)]\,\psi(u_\lambda).$$

Ist $p'_\alpha=1$ und, wenn β von α verschieden ist, $p'_\beta=0$, so ist folglich

$$(14.)\qquad \psi(u_\lambda+A_{\lambda\alpha}) = E[C_\alpha+N_\alpha+\sum_\lambda B_{\lambda\alpha}(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_{\lambda\alpha})]\,\psi(u_\lambda)$$

und daher nach dem oben erwähnten Satze $\psi(u_\lambda)=l.L_{n_1,\dots n_{2\varrho}}\,\Theta(u_\lambda, C_\alpha+N_\alpha)$, wo $L_{n_1,\dots n_{2\varrho}}$ eine Constante ist.

Ist G' das System der 2ϱ linearen Formen $\sum_\alpha g_{\alpha\beta}x_\alpha$, so sind, wenn $n_\beta\equiv 0$ (mod. G') ist, die Grössen N_α ganze Zahlen, mithin ist $E[-\Sigma p_\alpha N_\alpha]=1$. Ist n_β irgend ein Zahlensystem, so bleibt daher $E[-\Sigma p_\alpha N_\alpha]$ ungeändert, wenn dies System durch ein (mod. G') congruentes ersetzt wird. Ich setze nun in der Gleichung

$$(15.)\qquad \sum_{p_1,\dots p_{2\varrho}} E[-\sum_\alpha p_\alpha N_\alpha]\,\varphi(u_\lambda, p_\alpha) = l.L_{n_1,\dots n_{2\varrho}}\,\Theta(u_\lambda, C_\alpha+N_\alpha)$$

für n_β die verschiedenen Zahlensysteme irgend eines vollständigen Restsystems (mod. G') und addire die l so erhaltenen Gleichungen. Sind P_β die durch die Gleichungen

$$p_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta}P_\beta$$

bestimmten rationalen Zahlen, so ist

$$\Sigma p_\alpha N_\alpha = \Sigma P_\beta n_\beta.$$

Ist $p_\alpha\equiv 0$ (mod. G), so sind die Grössen P_β ganze Zahlen, und daher ist $\Sigma p_\alpha N_\alpha$ eine ganze Zahl, also $\sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} E[-\Sigma p_\alpha N_\alpha]=l$. Ist aber nicht $p_\alpha\equiv 0$ (mod. G), so sind die Zahlen P_β nicht alle ganz. Ist P_γ gebrochen und ersetzt man in der Summe $\sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} E[-\Sigma P_\beta n_\beta]=s$ n_γ durch $n_\gamma-1$, so erhält man $s=E[P_\gamma]s$ und daher $s=0$.

Durch Addition der l Gleichungen (15.) ergiebt sich folglich

$$(16.)\qquad \varphi(u_1,\dots u_\varrho) = \sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} L_{n_1,\dots n_{2\varrho}}\,\Theta(u_\lambda, C_\alpha+N_\alpha).$$

Die Function $\Theta(u_\lambda, C_\alpha+N_\alpha)$ ist eine *Jacobi*sche Function erster Ordnung mit den Perioden $A_{\lambda\alpha}$, $B_{\lambda\alpha}$ und den Parametern $C_\alpha+N_\alpha$, dagegen eine

*Jacobi*sche Function l^{ter} Ordnung mit den Perioden $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$ und den Parametern c_α. Die l Functionen $\Theta(u_\lambda, C_\alpha+N_\alpha)$ sind linear-unabhängig, wie man aus der obigen Entwicklung erkennt, indem man für $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ eine Function wählt, die identisch Null ist. Folglich ergeben sich die Sätze:

X. *Die Anzahl der linear-unabhängigen gleichändrigen Jacobischen Functionen ist ihrer Ordnung gleich.*

XI. *Zwischen je $l+1$ gleichändrigen Jacobischen Functionen l^{ter} Ordnung besteht eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten.*

Eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von irgend r mit φ gleichändrigen Functionen ist nach Formel (2.), § 6 eine *Jacobi*sche Function der Ordnung ln^ϱ. Die Anzahl der Glieder einer solchen ganzen Function ist $\binom{n+r-1}{r-1}$. Ist diese Zahl grösser als ln^ϱ, ist also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{r-1}{n}\right) > (r-1)!\, ln^{\varrho+1-r},$$

so kann man nach dem Satze XI. den Coefficienten der Function solche Werthe ertheilen, dass sie identisch verschwindet. Da sich die linke Seite jener Ungleichheit bei wachsendem n der Grenze 1, die rechte aber, falls $r > \varrho+1$ ist, der Grenze 0 nähert, so kann man unter dieser Bedingung n immer so gross wählen, dass sie erfüllt ist. Daraus folgt der von Herrn *Weierstrass* (Berliner Monatsberichte 1869) angegebene Satz:

XII. *Zwischen je $\varrho+2$ gleichändrigen Jacobischen Functionen vom Range ϱ besteht eine homogene algebraische Gleichung.*

Aus den obigen Entwicklungen, verbunden mit denen des § 4 geht hervor, dass die Bedingungen *A.* und *B.* nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, dass eine den σ Gleichungen (1.), § 1 genügende Function existirt. Denn zunächst ergänze man das System der σ Perioden (1.), § 4 nach den dort entwickelten Regeln zu einem System von 2ϱ Perioden (18.), § 4. Dann giebt es, wie oben gezeigt, eine Function φ, welche den Gleichungen (1.), § 1 nicht nur für $\alpha = 1, \dots \sigma$, sondern sogar für $\alpha = 1, \dots 2\varrho$ genügt. Ergänzt man die σ gegebenen Perioden auf mehrere verschiedene Weisen zu 2ϱ Perioden und die σ gegebenen Parameter zu 2ϱ Parametern, und bildet jedes Mal Functionen φ mit diesen 2ϱ Perioden und Parametern, so befriedigt auch eine lineare Verbindung derselben mit constanten Coefficienten die Gleichungen (1.), § 1. Allgemeiner genügt man denselben, indem man in der Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ die

Grössen $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$, c_α für $\alpha = 1, \dots \sigma$ als Constante, dagegen für $\alpha = \sigma+1, \dots 2\varrho$ als Variable betrachtet, deren Veränderlichkeit durch die Bedingungen *A.* und *B.* beschränkt ist, und das Product aus φ und einer willkürlichen Function dieser Variabeln zwischen solchen Grenzen integrirt, innerhalb deren die Bedingungen *A.* und *B.* niemals zu bestehen aufhören.

§ 9.

Primitive Perioden.

Zur Vervollständigung des im vorigen Paragraphen erhaltenen Resultates ist noch nachzuweisen, dass es unter den mit φ gleichändrigen Functionen auch solche giebt, für welche die 2ϱ Perioden $a_{\lambda\alpha}$ primitive sind. Hat φ eine Periode, welche nicht eine ganzzahlige lineare Verbindung der Perioden $a_{\lambda\alpha}$ ist, so muss sie doch eine Verbindung derselben sein, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, weil φ nicht mehr als 2ϱ unabhängige Perioden hat. Sei also

$$(1.)\qquad a_\lambda = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha a_{\lambda\alpha}$$

eine solche Periode, wo $n, n_1, \dots n_{2\varrho}$ keinen Divisor gemeinsam haben. Aus der Gleichung

$$(2.)\qquad \varphi(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) = E[c+\Sigma b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)]\,\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$$

folgt

$$\varphi(u_1+na_1, \dots u_\varrho+na_\varrho) = E[nc+\Sigma nb_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}na_\lambda)]\,\varphi(u_1, \dots u_\varrho).$$

Da nun andererseits der Formel (6.), § 1 zufolge

$$\varphi(u_1+na_1, \dots u_\varrho+na_\varrho) = E[C+\sum_\lambda(\sum_\alpha n_\alpha b_{\lambda\alpha})(u_\lambda+\tfrac{1}{2}\sum_\alpha n_\alpha a_{\lambda\alpha})]\,\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$$

ist, so ist

$$(3.)\qquad b_\lambda = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha b_{\lambda\alpha},\qquad c = \frac{1}{n}(C+g),$$

wo g eine ganze Zahl ist. Nach Formel (3.), § 1 müssen die Ausdrücke

$$\sum_\lambda(a_{\lambda\alpha}b_\lambda - b_{\lambda\alpha}a_\lambda) = g_\alpha$$

ganze Zahlen sein. Nun ist aber

$$ng_\alpha = \sum_{\lambda,\beta}(a_{\lambda\alpha}n_\beta b_{\lambda\beta} - b_{\lambda\alpha}n_\beta a_{\lambda\beta}) = \sum_\beta k_{\alpha\beta}n_\beta$$

und daher, wenn $\frac{l'}{k}$ der grösste gemeinsame Divisor der Zahlen $l_{\alpha\beta} = \frac{l'}{k}l'_{\alpha\beta}$ (also k das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Elementartheiler $k_1, \dots k_\varrho$) ist,

$$kn_\beta = n\sum_\alpha l'_{\alpha\beta}g_\alpha.$$

Die Zahlen kn, kn_1, ... $kn_{2\varrho}$ sind demnach alle durch n theilbar und mithin ist es auch k.

XIII. ***Hat die Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ ausser den 2ϱ Perioden $a_{\lambda\alpha}$ noch eine Periode, von der sich erst das n-fache aus den gegebenen Perioden zusammensetzen lässt, so ist n ein Divisor von k.***

Ist $l = 1$, so ist auch $k = 1$, und folglich sind die 2ϱ Perioden einer *Jacobi*schen Function erster Ordnung stets primitive.

Man kann voraussetzen, dass in der Gleichung (3.) die Zahl g und in der Gleichung (1.) die Zahlen n_α alle positiv und kleiner als n sind, und dass die letzteren nicht sämmtlich verschwinden. Die in die Gleichung (2.) eingehenden Constanten a_λ, b_λ, c können dann nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Sind φ_λ $(\lambda = 1, \dots l)$ l unabhängige mit φ gleichändrige Functionen, so setze man in der Differenz

$$\varphi(u_1 + a_1, \dots u_\varrho + a_\varrho) - E[c + \sum_\lambda b_\lambda(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a_\lambda)]\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$$

für φ den Ausdruck $\Sigma x_\lambda \varphi_\lambda$ ein, gebe den Constanten a_λ, b_λ, c die eben definirten Werthe und multiplicire die so erhaltenen Functionen. Wären nun die Perioden $a_{\lambda\alpha}$ für keine der Functionen φ primitive, so müsste für jedes Werthsystem der $l+\varrho$ Variabeln x_λ, $u_\varkappa$ einer der Factoren dieses Productes verschwinden. Da aber ein Product mehrerer analytischer Functionen nicht für alle Werthe der Variabeln verschwinden kann, ohne dass einer der Factoren identisch verschwindet, so müsste es unter den Perioden a_λ eine solche geben, dass die Gleichung (2.) für jede Function φ erfüllt wäre. Ist in dem Ausdruck (1.) dieser Periode a_λ etwa n_1 von Null verschieden, so sind a_λ, $a_{\lambda 2}$, ... $a_{\lambda,2\varrho}$ 2ϱ unabhängige Perioden der l unabhängigen Functionen $\varphi_1, \dots \varphi_l$. Die aus ihnen und den entsprechenden Perioden zweiter Gattung gebildete Determinante ist $l' = l\frac{n_1}{n}$, also $l' < l$. Dies widerspricht aber dem Satze X., nach welchem die Anzahl der unabhängigen Functionen mit jenen Perioden nicht grösser als l' sein kann.

Daran knüpfe ich noch die folgende Bemerkung: Hat eine Function φ zwei Perioden

$$a_\lambda = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha a_{\lambda\alpha}, \quad a'_\lambda = \frac{1}{n'}\sum_\alpha n'_\alpha a_{\lambda\alpha},$$

die sich nicht ganzzahlig aus den Perioden $a_{\lambda\alpha}$ zusammensetzen lassen, so entsprechen ihnen die Perioden zweiter Gattung

$$b_\lambda = \frac{1}{n}\sum_\alpha n_\alpha b_{\lambda\alpha}, \quad b'_\lambda = \frac{1}{n'}\sum_\alpha n'_\alpha b_{\lambda\alpha}.$$

Nach Formel (3.), § 1 muss nun der Ausdruck

$$\sum_\lambda (a_\lambda b'_\lambda - a'_\lambda b_\lambda) = \frac{1}{nn'} \sum_{\alpha,\beta} (n_\alpha a_{\lambda\alpha} n'_\beta b_{\lambda\beta} - n'_\beta a_{\lambda\beta} n_\alpha b_{\lambda\alpha}) = \frac{1}{nn'} \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n'_\beta$$

eine ganze Zahl sein, und mithin muss $\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n'_\beta$ durch nn' theilbar sein. (Vgl. dieses Journal Bd. 96, S. 91.)

§ 10.

Gerade und ungerade Functionen.

Ersetzt man in der Gleichung (1.), § 1 u_λ durch $-u_\lambda - a_{\lambda\alpha}$, so erhält man

$$\varphi(-u_1 - a_{1\alpha}, \dots -u_\varrho - a_{\varrho\alpha}) = E[-c_\alpha + \sum_\lambda b_{\lambda\alpha}(u_\lambda + \tfrac{1}{2} a_{\lambda\alpha})] \varphi(-u_1, \dots -u_\varrho).$$

Damit also φ eine gerade oder ungerade Function sei, muss

$$(1.) \qquad 2c_\alpha = h_\alpha$$

sein, wo die Grössen h_α ganze Zahlen sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist $\varphi(-u_1, \dots -u_\varrho)$ mit $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ gleichändrig.

Unter den betrachteten Functionen giebt es l unabhängige $\varphi_\lambda(u_1, \dots u_\varrho)$ $(\lambda = 1, \dots l)$. Jede andere lässt sich linear aus ihnen zusammensetzen, also auch aus den $2l$ geraden und ungeraden mit φ gleichändrigen Functionen

$$\varphi_\lambda(u_1, \dots u_\varrho) + \varphi_\lambda(-u_1, \dots -u_\varrho) \quad \text{und} \quad \varphi_\lambda(u_1, \dots u_\varrho) - \varphi_\lambda(-u_1, \dots -u_\varrho).$$

Befinden sich daher unter den l geraden g und unter den l ungeraden h unabhängige Functionen, so ist $g+h \geqq l$, und weil zwischen den g geraden und h ungeraden Functionen keine lineare Relation bestehen kann, auch $g+h \leqq l$, und mithin ist $g+h = l$. Setzt man also $g-h = m$, so ist

$$g = \tfrac{1}{2}(l+m) \quad \text{und} \quad h = \tfrac{1}{2}(l-m).$$

Die Function $\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha)$ ist durch die Gleichungen (14.), § 8 bis auf einen constanten Factor genau bestimmt. Ist

$$n'_\beta = -n_\beta - h_\beta + \sum_\lambda g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\beta} = \sum_\alpha g_{\alpha\beta} N'_\alpha,$$

so genügt unter der Voraussetzung (1.) die Function $\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N'_\alpha)$ denselben Bedingungen, wie die Function $\Theta(-u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha)$. Man kann daher in der einen dieser beiden Functionen den constanten Factor willkürlich wählen, in der andern so, dass

$$\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N'_\alpha) = \Theta(-u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha)$$

wird. Dies ist nur dann nicht möglich, wenn die Differenzen der Parameter

dieser beiden Functionen $N_\alpha - N'_\alpha = x_\alpha$ ganze Zahlen sind. Da

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta}(N_\alpha - N'_\alpha) = n_\beta - n'_\beta = 2n_\beta + 2c_\beta - \sum_\lambda g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\beta}$$

ist, so ist in diesem Falle nach (4.), § 8

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta} x_\alpha = 2\sum_\alpha g_{\alpha\beta}(N_\alpha + C_\alpha),$$

und mithin sind die doppelten Parameter der Function $\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha)$

$$(2.) \qquad 2(C_\alpha + N_\alpha) = x_\alpha$$

ganze Zahlen. Bekanntlich ist dieselbe unter jener Bedingung gerade oder ungerade, je nachdem $\Sigma x_\lambda x_{\varrho+\lambda}$ gerade oder ungerade ist. Sind unter diesen Functionen g' gerade und h' ungerade, so sind, wie sich aus Formel (16.), § 8 leicht ergiebt, die g' [h'] geraden [ungeraden] Functionen $\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha)$, deren Parameter den Bedingungen (2.) genügen, zusammen mit den Functionen $\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha) + \Theta(u_\lambda, C_\alpha + N'_\alpha)$ [$\Theta(u_\lambda, C_\alpha + N_\alpha) - \Theta(u_\lambda, C_\alpha + N'_\alpha)$], deren Parameter ihnen nicht genügen, die g [h] geraden [ungeraden] Functionen, und folglich ist $m = g - h = g' - h'$.

Zwischen den Zahlen n_α und x_α bestehen die Beziehungen

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta} x_\alpha = 2n_\beta + h_\beta - \sum_\lambda g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\beta}.$$

Entsprechen in derselben Weise den Zahlen m_α die Zahlen y_α, ist also

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta} y_\alpha = 2m_\beta + h_\beta - \sum_\lambda g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\beta},$$

so ist

$$\sum_\alpha g_{\alpha\beta}(x_\alpha - y_\alpha) = 2(n_\beta - m_\beta).$$

Die Zahlensysteme m_β und n_β sind folglich (mod. G') congruent oder nicht, je nachdem die Differenzen $x_\alpha - y_\alpha$ alle gerade sind oder nicht. Man erhält daher alle (mod. G') incongruenten Zahlensysteme n_α, denen ganzzahlige Werthe der Grössen x_α entsprechen, indem man alle (mod. 2) incongruenten Zahlensysteme x_α aufsucht, welche den Congruenzen

$$(3.) \qquad \sum_\gamma g_{\gamma\alpha} x_\gamma + \sum_\lambda g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\alpha} + h_\alpha \equiv 0 \pmod{2}$$

genügen. Dann ist m die Differenz zwischen der Anzahl derjenigen ihrer Lösungen, für welche der Ausdruck $\Sigma x_\lambda x_{\varrho+\lambda}$ gerade ist, und derjenigen, für welche er ungerade ist. Bezeichnet man die linke Seite der Congruenz (3.) mit v_α, so ist folglich $2^{2\varrho} m$ gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Werthe der 4ϱ Grössen x_γ, n_α, für welche der Ausdruck

$$(4.) \qquad \sum_\lambda x_\lambda x_{\varrho+\lambda} + \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha$$

gerade ist, und der Anzahl der Werthe, für welche er ungerade ist. Denn ist für ein bestimmtes Werthsystem x_γ eine der Functionen v_α, etwa v_β, ungerade, so ist $n_\beta v_\beta$ gerade oder ungerade, je nachdem n_β gerade oder ungerade ist, und daher ist der Theil jener Differenz, der diesem Werthsystem x_γ und beliebigen n_α entspricht, gleich Null. Sind aber für ein Werthsystem x_γ die Functionen v_α alle gerade, so ist der Ausdruck (4.) congruent $\Sigma x_\lambda x_{\varrho+\lambda}$. Die Differenz der den Congruenzen $v_\alpha \equiv 0$ genügenden Werthe x_γ, für welche dieser Ausdruck gerade oder ungerade ist, ist gleich m, und da man jedes dieser Werthsysteme x_γ mit jedem der $2^{2\varrho}$ Werthsysteme n_α verbinden kann, so ist jene Differenz für den Ausdruck (4.) gleich $2^{2\varrho}m$. Derselbe ist (mod. 2) congruent

$$\sum_\lambda x_\lambda x_{\varrho+\lambda} + \sum_{\lambda,\alpha}(g_{\lambda\alpha} x_\lambda n_\alpha + g_{\varrho+\lambda,\alpha} x_{\varrho+\lambda} n_\alpha + g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\alpha} n_\alpha^2) + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha$$

und geht daher durch die Substitutionen

$$x_\lambda = z_\lambda + \sum_\alpha g_{\varrho+\lambda,\alpha} n_\alpha, \quad x_{\varrho+\lambda} = z_{\varrho+\lambda} + \sum_\alpha g_{\lambda\alpha} n_\alpha$$

in den Ausdruck

$$\sum_\lambda z_\lambda z_{\varrho+\lambda} + \sum_{\alpha,\beta}{}' \sum_\lambda (g_{\lambda\alpha} g_{\varrho+\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta} g_{\varrho+\lambda,\alpha}) n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha$$

über, der nach Formel (1.), § 8 congruent

$$\sum_\lambda z_\lambda z_{\varrho+\lambda} + \sum_{\alpha,\beta}{}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha$$

ist. Mithin ist

$$2^{2\varrho} m = \sum_{z_1,\dots z_{2\varrho}, n_1,\dots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum_\lambda z_\lambda z_{\varrho+\lambda} + \sum'_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha}$$

$$= \Big(\sum_{z_1,\dots z_{2\varrho}} (-1)^{\sum_\lambda z_\lambda z_{\varrho+\lambda}}\Big)\Big(\sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum'_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha}\Big),$$

wo jeder der Zahlen $z_1, \dots z_{2\varrho}$, $n_1, \dots n_{2\varrho}$ die Werthe 0 und 1 zu ertheilen sind. Da nun

$$\sum_{z_1,\dots z_{2\varrho}} (-1)^{\sum_\lambda z_\lambda z_{\varrho+\lambda}} = \prod_\lambda \Big(\sum_{z_\lambda, z_{\varrho+\lambda}} (-1)^{z_\lambda z_{\varrho+\lambda}}\Big) = 2^\varrho$$

ist, so ist folglich*)

$$(5.) \qquad 2^\varrho m = \sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum'_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum_\alpha h_\alpha n_\alpha}.$$

---

*) Sind die Ausdrücke

$$\Sigma z_\lambda z_{\varrho+\lambda}, \quad \Sigma' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \Sigma h_\alpha n_\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma z_\lambda z_{\varrho+\lambda} + \Sigma' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \Sigma h_\alpha n_\alpha$$

für r, s, t Werthsysteme gerade und für u, v, w ungerade, so ist $t = ru + sv$, $w = rv + su$ und mithin $t - w = (r-u)(s-v)$. Sind die ϱ Zahlen $z_{\varrho+\lambda}$ nicht alle gerade, so hat die Congruenz $\Sigma z_{\varrho+\lambda} z_\lambda \equiv 0$ zwischen den ϱ Unbekannten z_λ ebenso viele Lösungen, wie die Congruenz $\Sigma z_{\varrho+\lambda} z_\lambda \equiv 1$. Sind aber die ϱ Zahlen $z_{\varrho+\lambda}$ alle gerade, so hat jene Congruenz 2^ϱ, diese keine Lösung, und folglich ist $r - u = 2^\varrho$.

Ist das Periodensystem ein normales, so ist daher

$$(6.)\qquad 2^\varrho m = \sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum\limits_\lambda (k_\lambda n_\lambda n_{\varrho+\lambda} + h_\lambda n_\lambda + h_{\varrho+\lambda} n_{\varrho+\lambda})},$$

also

$$2^\varrho m = \prod_\lambda \Big(\sum_{n_\lambda, n_{\varrho+\lambda}} (-1)^{(k_\lambda n_\lambda n_{\varrho+\lambda} + h_\lambda n_\lambda + h_{\varrho+\lambda} n_{\varrho+\lambda})} \Big).$$

Ist k_λ gerade, so ist der λ^{te} Factor des Productes gleich

$$\Big(\sum_{n_\lambda} (-1)^{h_\lambda n_\lambda}\Big)\Big(\sum_{n_{\varrho+\lambda}} (-1)^{h_{\varrho+\lambda} n_{\varrho+\lambda}}\Big).$$

Sind also die Zahlen h_λ und $h_{\varrho+\lambda}$ beide gerade, so ist er gleich $4 = (-1)^{h_\lambda h_{\varrho+\lambda}} 4$. Ist aber auch nur eine der beiden Zahlen h_λ, $h_{\varrho+\lambda}$ ungerade, so ist er Null. Ist dagegen k_λ ungerade, so ist jener Factor gleich

$$(-1)^{h_\lambda h_{\varrho+\lambda}} \sum_{n_\lambda, n_{\varrho+\lambda}} (-1)^{(n_\lambda + h_{\varrho+\lambda})(n_{\varrho+\lambda} + h_\lambda)} = (-1)^{h_\lambda h_{\varrho+\lambda}} 2.$$

Sind folglich auch nur für ein einziges gerades k_λ die entsprechenden Zahlen h_λ, $h_{\varrho+\lambda}$ nicht beide gerade, so ist $m = 0$. Sind aber für jeden Index λ, für den k_λ gerade ist, auch h_λ und $h_{\varrho+\lambda}$ gerade, und sind σ der Zahlen k_λ ungerade und $\varrho - \sigma$ gerade, so ist

$$2^\varrho m = (-1)^{\sum h_\lambda h_{\varrho+\lambda}} 2^{\sigma + 2(\varrho - \sigma)}$$

oder

$$(7.)\qquad m = (-1)^{\sum\limits_\lambda h_\lambda h_{\varrho+\lambda}} 2^{\varrho - \sigma}.$$

Aus der Gleichung (6.) kann man die allgemeinere Formel (5.) folgendermassen herleiten. Nach (6.), § 1 ist

$$\varphi(u_1 + a_1, \dots u_\varrho + a_\varrho) = (-1)^{\sum\limits_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \sum\limits_\alpha h_\alpha n_\alpha} E[\Sigma b_\lambda (u_\lambda + \tfrac{1}{2} a_\lambda)] \varphi(u_1, \dots u_\varrho).$$

und daher ist die Formel (5.) gleichbedeutend mit

$$(8.)\qquad 2^\varrho m \varphi(u_1, \dots u_\varrho) = \Sigma E[-\Sigma b_\lambda (u_\lambda + \tfrac{1}{2} a_\lambda)] \varphi(u_1 + a_1, \dots u_\varrho + a_\varrho).$$

Hier durchläuft jede der Zahlen n_α ein vollständiges Restsystem (mod. 2), und mithin durchläuft $\frac{1}{2} a_\lambda$, $\frac{1}{2} b_\lambda$ ein vollständiges System incongruenter halber Perioden. Folglich ist die Summe (8.) und daher auch die Summe (5.) von der Wahl des Periodensystems unabhängig. Besteht die Gleichung (5.) also für ein normales Periodensystem, so folgt daraus ihre allgemeine Gültigkeit.

Nach dieser Formel ist $2^\varrho m$ gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Lösungen der Congruenzen $\Sigma' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \Sigma h_\alpha n_\alpha \equiv 0$ und der Anzahl der

Lösungen der Congruenzen $\Sigma' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta - \Sigma h_\alpha n_\alpha \equiv 1 \pmod{2}$. Mit Hülfe der Untersuchungen des Herrn *Camille Jordan* über die Reduction quadratischer Congruenzen (Journal de *Liouville* Sér. 2. tom. 17. p. 368) und der Sätze von *H. J. Steffen Smith* über die arithmetischen Invarianten der Geschlechter quadratischer Formen (Proc. of the royal soc. of London. vol. XVI. p. 197) kann man diese Anzahlen bestimmen und gelangt so zu folgendem Resultat: Ist

$$r_{\alpha\alpha} = 2h_\alpha, \quad r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha} = k_{\alpha\beta} \qquad (\alpha < \beta),$$

und sind in dem symmetrischen System

$$r_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots 2\rho)$$

die Determinanten $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades alle gerade, die τ^{ten} Grades aber nicht alle, so ist τ eine gerade Zahl 2σ, und unter den ungeraden Determinanten $(2\sigma)^{\text{ten}}$ Grades befinden sich auch Hauptdeterminanten. Dieselben sind sämmtlich congruent $(-1)^\sigma \pmod{4}$. Sei $2t$ der grösste gemeinsame Divisor der Hauptdeterminanten $(2\sigma+1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $r_{\alpha\beta}$. Ist dann t gerade, so sind die ungeraden Hauptdeterminanten $2\sigma^{\text{ten}}$ Grades alle (mod. 8) unter einander congruent. Ist s irgend eine derselben (und ist $s = 1$ für $\sigma = 0$), so ist

$$(9.) \qquad m = (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} 2^{\rho-\sigma} \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem t gerade oder ungerade ist.

Zürich, December 1883.

Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten*).

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

1. ***Es seien n beliebige Punkte im Raume gegeben:*** $A_1, A_2, \dots A_n$; M, P seien zunächst zwei beliebige Punkte, so haben wir, indem $\angle PMA_i$ mit $\mathfrak{a}_i$ bezeichnet wird:

$$(1.)\quad \begin{cases} PA_1\cos PA_1M + PM\cos\mathfrak{a}_1 = MA_1, \\ PA_2\cos PA_2M + PM\cos\mathfrak{a}_2 = MA_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

also durch Addition über alle Punkte A_i, die wir durch das einfache Summenzeichen Σ ausdrücken wollen:

$$(2.)\quad \Sigma PA_i\cos PA_iM + PM\Sigma\cos\mathfrak{a}_i = \Sigma MA_i.$$

Wir ersetzen M durch einen der Punkte A_i, etwa durch A_n, und addiren die $n-1$ ersten Gleichungen (1.), wodurch sich, indem wir zugleich $PA_nA_i = \mathfrak{a}'_i$ setzen, ergiebt:

$$(3.)\quad \sum_1^{n-1} PA_i\cos PA_iA_n + PA_n\sum_1^{n-1}\cos\mathfrak{a}'_i = \Sigma A_nA_i.$$

Wir nehmen nun den speciellen Fall an, dass P dem Punkte M, bez. A_n unendlich nahe liegt; mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen

*) Dieser Aufsatz befand sich schon in anderer Form in den Händen der Redaction des Journals, als ich, kurz bevor er gesetzt werden sollte, von Herrn *H. A. Schwarz* auf den Aufsatz des Herrn *Lindelöf* in den Acta Societatis Scientiarum Fennicae (welche mir hier nicht zugänglich sind) Januar 1866, S. 191, durch freundliche Uebersendung desselben aufmerksam gemacht wurde. In demselben fand ich freilich einige Resultate, auf welche ich Werth legte, mitgetheilt; ich habe in Folge dessen meinen Aufsatz zurückerbeten und wesentlich gekürzt; wenn ich ihn doch nicht ganz zurücknehme, so geschieht es wegen der *elementaren* Darstellung, sowie wegen meines Nachweises des *absoluten* Minimums und einiger anderer Bemerkungen, zum Theil auch, weil jene Acta wohl nicht sehr verbreitet sind und daher Herrn *Lindelöfs* Arbeit auch Andern unbekannt geblieben sein wird.

zweiter und höherer Ordnung ist dann:

$$(4.) \qquad \Sigma PA_i + PM\Sigma\cos\alpha_i = \Sigma MA_i,$$

$$(5.) \qquad \sum_1^{n-1} PA_i + PA_n \sum_1^{n-1}\cos\alpha'_i = \Sigma A_n A_i;$$

α_i, α'_i sind die Winkel eines Halbstrahls aus M, bez. A_n mit MA_i, bez. A_nA_i.

2. Da die Entfernungssumme nicht bis zu Null herabgehen kann, so muss es mindestens einen Punkt geben mit kleinster Entfernungssumme. Es sei M ein solcher Punkt, der von allen A_i verschieden ist, und P ein beliebiger ihm unendlich naher Punkt; so muss wegen (4.):

$$\Sigma\cos\alpha_i \leqq 0$$

sein. Gesetzt es wäre $\Sigma\cos\alpha_i < 0$, so nehmen wir auf dem ergänzenden Halbstrahl den an M unendlich nahen P, die α_i gehen in die Supplemente über, $\Sigma\cos\alpha_i$ wird also > 0, und für diesen P wäre $\Sigma PA_i < \Sigma MA_i$, also M nicht Minimumspunkt. *Demnach ergiebt sich für einen von den A_i verschiedenen Minimumspunkt als nothwendige Bedingung, dass für jeden von ihm ausgehenden Halbstrahl:*

$$(6.) \qquad \Sigma\cos\alpha_i = 0.$$

Es habe zweitens A_n die kleinste Entfernungssumme, so ergiebt sich aus (5.) oder:

$$\Sigma PA_i + PA_n\Big(\sum_1^{n-1}\cos\alpha'_i - 1\Big) = \Sigma A_n A_i,$$

dass:

$$\sum_1^{n-1}\cos\alpha'_i \leqq 1;$$

woraus dann folgt:

$$\sum_1^{n-1}\cos\alpha'_i \geqq -1,$$

indem man wieder jeden Halbstrahl durch seinen ergänzenden Halbstrahl ersetzt.

Wenn also einer von den Punkten A_i selbst Minimumspunkt ist, so ist für jeden von ihm ausgehenden Halbstrahl:

$$(7.) \qquad 1 \geqq \sum_1^{n-1}\cos\alpha'_i \geqq -1.$$

Und umgekehrt, ein Punkt M, für den (6.) gilt, oder ein Punkt A_i, z. B. A_n, für welchen (7.) besteht, hat nicht nur kleinere Entfernungssumme als seine Nachbarpunkte, sondern als jeder beliebige Punkt. Sei also jetzt P ein beliebiger Punkt, so geht für einen (6.) genügenden Punkt M (2.) über in:

$$(8.) \qquad \Sigma PA_i\cos PA_iM = \Sigma MA_i;$$

hieraus und ebenso aus der Gleichung (3.), angewandt auf einen A_n, welcher (7.) genügt, folgt:

$$\Sigma PA_i > \Sigma MA_i,$$

bez.

$$\Sigma PA_i > \Sigma A_n A_i;$$

indem in beiden Fällen Factoren, welche $\leqq 1$, $\geqq -1$ und sicher nicht alle $= 1$ sind, (unter ihnen im zweiten Falle auch $\sum\limits_1^{n-1} \cos\alpha_i'$) durch $+1$ ersetzt wurden.

Damit ist ein solcher Punkt M, bez. A_n als ein Punkt ***absoluten*** Minimums nachgewiesen, so wie aber auch als ***einziger*** Minimumspunkt.

Dieses absolute Minimum, d. h. die Eigenschaft, dass für den betreffenden Punkt M, bez. A_n die Entfernungssumme kleiner ist als für jeden beliebigen Punkt, ist, meines Erachtens, in keinem der Beweise, die sich des gewöhnlichen Verfahrens der Differentialrechnung bedienen*), nachgewiesen; auch Herr *Lindelöf*, der sich ebenfalls der Differentialrechnung bedient, muss in seiner Arbeit, die sonst die werthvollste über diesen Gegenstand ist, annehmen, dass MP, bez. $A_n P$ eine endliche, aber ***sehr kleine*** Entfernung sei. Dass ev. auch einer der Punkte A_i Minimumspunkt sein kann, war, bevor Herr *Lindelöf* die Sache eingehender untersuchte, nur für den einfachsten Fall $n = 3$ bekannt; ich finde diese Lösung erwähnt bei Herrn *J. Bertrand*, dessen Auseinandersetzung mir jedoch nicht recht verständlich ist, bei Herrn *Heinen*, der sich mit der Wendung begnügt, dass der betreffende Punkt A_i die kleinste Entfernungssumme giebt, „indem eine Entfernung Null ist", und bei *Steiner* in der citirten Anm. 11), welcher diese Lösung ohne Beweis erwähnt mit dem eigenthümlichen Zusatze: „der Charakter des Minimums ist im strengen Sinne nicht vorhanden." Die Geometer, die sich sonst mit dem Probleme beschäftigt haben, scheinen nur Punkte M als Minimumspunkte

---

*) *J. Bertrand*, *Liouvilles* Journal Ser. I, Bd. 8, S. 155; *Dippe*, dieses Journal Bd. 16, S. 74; *Fr. Heinen*, Programm des Gymn. zu Cleve 1834, welches ich der Bemühung des Herrn *Brockmann* in Cleve verdanke; *Schlömilch*, Comp. der höh. Analysis, Bd. I, § 34; *Sohncke-Amstein*, Aufgaben aus der Differentialrechnung (Halle 1875), Kap. VIII, Aufg. 95, 96; *Wetzig*, dieses Journal Bd. 62, S. 346, Abschnitt III, wo für die Relation (6.) noch *Tédénat* und *Lhuilier* aus den mir hier unzugänglichen *Gergonne*schen Annalen (Bd. I, S. 285, 297) citirt werden; *Schärtlin*, Zeitschr. f. Math. Bd. 26, S. 70.

Ein der Relation (6.) entsprechender Satz findet sich (ohne Beweis) in der handschriftlichen Notiz *Steiners*, welche in Anm. 11) S. 729 von Bd. II der Gesamm. Werke im Anschlusse an eine sehr knappe im Monatsberichte der Berliner Akademie 1837 erschienene Note *Steiners* über den Punkt der kleinsten Entfernung veröffentlicht ist.

zu kennen, welche (6.) genügen, und deshalb die Existenz eines solchen Punktes für selbstverständlich zu halten. —

Da nur ein Minimumspunkt vorhanden ist, aber auch nothwendig einer, so folgt:

Je nachdem ein M oder A_i Minimumspunkt ist, ist kein A_i oder M vorhanden, der der Bedingung (6.) *oder* (7.) *genügt. Und ist kein A_i vorhanden, welcher* (7.) *befriedigt, so muss ein Punkt M existiren, welcher* (6.) *befriedigt.*

3. Nehmen wir den Fall, wo es einen (7.) befriedigenden Punkt A_i giebt, als den interessanteren zuerst vor.

Diese Bedingung (7.), unter welcher einer der gegebenen Punkte, A_n, Minimumspunkt ist, lässt sich folgendermassen aussprechen:

A_nA_1, A_nA_2, ... A_nA_{n-1} *müssen dann in Richtung und Sinn mit den gleichen Seiten eines (im Allgemeinen räumlichen) n-Ecks übereinstimmen*), welches $n-1$ gleiche Seiten hat, etwa von der Länge a, während die letzte $\leqq a$ ist;* denn dann ist die Summe der Projectionen der ersteren, d. i. $a\sum_1^{n-1}\cos\alpha_i'$, auf eine beliebige Gerade absolut $\leqq a$.

Bei $n=3$ heisst dies: *A_3 ist Minimumspunkt,* wenn A_3A_1, A_3A_2 in Richtung und Sinn übereinstimmen mit den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich oder kleiner ist, als die Schenkel; also wenn $\angle A_1A_3A_2$ Aussenwinkel an der Spitze eines solchen Dreiecks oder *wenn $\angle A_1A_3A_2 \geqq \frac{2}{3}\pi$ ist.* Man kann auch sagen: $\angle A_1A_3A_2$ muss mindestens ein Drittel der Ebene sein. Dies ist, wie gesagt, bekannt, aber in dieser einfachen Weise wohl noch nicht bewiesen. *Sind vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in derselben Ebene gegeben,* so müssen, damit A_4 Minimumspunkt sei, dieselben so liegen, dass A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 mit den Seiten $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ eines Vierecks in Richtung und Sinn übereinstimmen, welche dieselbe Länge a haben, während $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \leqq a$ ist. Machen wir noch $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3'$ bez. äquipollent**) mit $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, so findet man leicht, dass $\mathfrak{A}_3$ innerhalb des Streifens zwischen $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ und also $\mathfrak{A}_3'$ ausserhalb desselben liegt, so dass das Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'$ den Punkt $\mathfrak{A}_4$ einschliesst, und, da $\mathfrak{A}_4(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3')$ mit $A_4(A_1, A_2, A_3)$ im Sinn übereinstimmen, auch A_4 von $A_1A_2A_3$ eingeschlossen wird. *Wird also einer der vier Punkte, A_4, vom Dreieck der drei andern*

*) Wobei der Sinn der Seiten durch die continuirliche Umlaufung bestimmt wird.

**) d. h. in Richtung, Sinn und Länge übereinstimmend.

eingeschlossen, so ist er selbst der Minimumspunkt; wie man auch direct und überaus einfach auf folgende Weise sehen kann:

Die Scheitelwinkel von $A_2A_4A_3$, $A_3A_4A_1$, $A_1A_4A_2$ bedecken in diesem Falle die ganze Ebene; also muss ein beliebiger Punkt P in einem von ihnen liegen; es sei im dritten; so umschliesst $\angle A_1PA_2$ den $\angle A_1A_4A_2$, also ist

$$PA_1+PA_2 > A_4A_1+A_4A_2;$$

ferner

$$PA_3+PA_4 > A_4A_3, \quad \text{also:} \quad \Sigma PA_i > \Sigma A_4A_i.$$

4. *Liegen aber die vier Punkte A_i im Raume,* so wenden wir auf das windschiefe Viereck $\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, in dem

$$\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = a \geqq \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$$

und

$$\angle \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \pi - A_1A_4A_2, \quad \angle \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = \pi - A_2A_4A_3, \quad \angle(\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) = A_1A_4A_3,$$

die zweite Formel in *Baltzers* Elementen, Trig. § 6, 6 an:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1.\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\cos(\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3) &= \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}^2+\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}^2-\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2}^2-\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}^2 \\ &= \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}^2+\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}^2-(\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1}^2+\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}^2-2\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1.\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cos\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) \\ &\quad -(\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}^2+\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}^2-2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2.\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\cos\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3), \end{aligned}$$

oder:

$$(9.) \quad \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}^2-a^2 = 2a^2(1+\cos A_2A_4A_3+\cos A_3A_4A_1+\cos A_1A_4A_2).$$

Demnach ist:

$$(10.) \quad 1+\cos A_2A_4A_3+\cos A_3A_4A_1+\cos A_1A_4A_2 \leqq 0.$$

Damit also der Eckpunkt A_4 des Tetraeders der gegebenen Punkte $A_1A_2A_3A_4$ selbst Minimumspunkt sei, muss die um 1 vermehrte Summe der Cosinusse der Kantenwinkel der Ecke $A_4 \leqq 0$ sein; und umgekehrt.

Es sei erlaubt, diese wichtige Grösse den „Cosinus der Ecke" zu nennen.

Nennen wir den Excess der Ecke (den Ueberschuss der Summe der Flächenwinkel über π) ε, so ist nach *Baltzer* Trig. § 5, 14:

$$(11.) \quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3}{4\cos\frac{1}{2}\alpha_1.\cos\frac{1}{2}\alpha_2.\cos\frac{1}{2}\alpha_3},$$

worin $\alpha_1 = A_2A_4A_3$, etc. Also ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq 0;$$

d. h.

$$(12.) \quad \varepsilon \geqq \pi.$$

Der Excess der Ecke muss also $\geqq \pi$, das zugehörige sphärische Dreieck

ebenso gross oder grösser als ein Viertel der Kugeloberfläche, ***oder die Ecke selbst ebenso gross oder grösser als ein Viertel des Raumes sein.*** Der vorige Fall, wo A_4 in der Ebene und zwar im Innern von $A_1A_2A_3$ liegt, subsumirt sich dem jetzigen: die Ecke $A_4(A_1, A_2, A_3)$ ist gleich der Hälfte des Raums, oder $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi$ und deshalb

$$1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3 = -4\cos\frac{\alpha_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_3}{2} \leqq 0.$$

Zu diesen Resultaten bin ich selbständig gelangt, fand sie aber in Herrn *Lindelöfs* Aufsatz enthalten, und zwar aus (7.), die dort, wie gesagt, mit Hilfe der Analysis gewonnen ist, durch die nämlichen Formeln (9.), (11.), von denen (9.) ohne Beweis mitgetheilt wird, abgeleitet.

5. Wenn nun aber keiner der Punkte A_i der Bedingung (7.) genügt, so muss es einen Punkt M geben, welcher (6.) befriedigt. Diese Bedingung lautet geometrisch ausgesprochen:

Die Strecken MA_1, MA_2, ... müssen in Richtung und Sinn übereinstimmen mit den Seiten eines gleichseitigen n-Ecks; oder was dasselbe ist: n gleiche Kräfte, die in ihnen wirken je in dem Sinne MA_1, MA_2, ..., müssen sich das Gleichgewicht halten*).

Die blosse Uebereinstimmung in der Richtung fordert von den n Geraden MA_1, MA_2, ... gerade die Erfüllung der nothwendigen Zahl $4n$ von Bedingungen. Die Mannigfaltigkeit nämlich der räumlichen gleichseitigen n-Ecke von gegebener Seitenlänge und einem festen Eckpunkt — denn ähnliche und ähnlich gelegene Polygone bewirken in unserm Falle keinen Unterschied — ist $2n-3$; da von den $n-2$ ersten Seiten jede einzelne, nachdem die vorhergehenden gezogen sind, noch eine doppelte Beweglichkeit hat, das Paar der beiden letzten aber nur noch einfach unendlich viele Lagen einnehmen kann. Der Parallelismus von n Geraden mit den n Seiten eines bestimmten dieser Polygone involvirt $2n$, derjenige also mit den Seiten irgend eines dieser Polygone $2n-(2n-3)=3$ Bedingungen. Die Incidenz der n Geraden mit den gegebenen Punkten A_i involvirt weiter $2n$ Bedingungen und endlich ihre Concurrenz in einen Punkt $2n-3$, nämlich für die beiden ersten zusammen 1, für jede weitere einzelne 2 Bedingungen**).

---

*) Vergl. *Dippe, Heinen, Wetzig, Lindelöf, Schärtlin,* a. a. O.; auch *Jullien,* Problèmes de mécanique rationnelle (2. Aufl.) Bd. I, S. 191.

**) Beim ebenen Problem sind die entsprechenden Zahlen $n-(n-2)$, n, $n-2$.

Kommen nun aber noch die auf den Sinn bezüglichen Bedingungen hinzu, so kann Unmöglichkeit der Lösung eintreten; und sie tritt ein, wie wir gesehen haben, wenn einer der Punkte A_i der Bedingung (7.) Genüge leistet.

6. Bei $n = 3$ müssen die drei Strecken MA_1, MA_2, MA_3 mit den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in Richtung und Sinn übereinstimmen; d. h. $\angle A_2MA_3 = \angle A_3MA_1 = \angle A_1MA_2 = \frac{2}{3}\pi$. Hieraus hat schon, nach dem Citat des Herrn *Lindelöf, Simpson* die Folgerung gezogen, dass, *wenn über den drei Seiten nach aussen die gleichseitigen Dreiecke $A_2A'A_3$, $A_3A''A_1$, $A_1A'''A_2$ construirt werden, die drei Verbindungslinien A_1A', A_2A'', A_3A''' in den Minimumspunkt M zusammenlaufen.*

Heinen und *Lindelöf* folgern weiter daraus den Satz, zu dem auch ich selbständig gelangt war, dass *diese drei Verbindungslinien alle gleich der kleinsten Entfernungssumme sind,* und dass somit die drei Grössen

$$\overline{A_3A_1^2 + A_1A_2^2 - 2A_3A_1 . A_1A_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + A_1\right)} \text{ etc.}$$

denselben Werth haben. Andererseits ist klar, dass die Lothe auf MA_1, MA_2, MA_3 in den Ecken A_1, A_2, A_3 ein gleichseitiges Dreieck bilden, und dass somit auch die Aufgabe gelöst ist, dem gegebenen Dreiecke ein gleichseitiges so umzuschreiben, dass die Lothe auf dessen Seiten in den Ecken des gegebenen in einen Punkt zusammenlaufen.

Merkwürdigerweise scheint *Steiner,* wenn ich richtig verstehe, was in der oben erwähnten Anm. 11) S. 731 gesagt ist, der Ansicht gewesen zu sein, als wenn die Minimums-Aufgabe für n beliebige Punkte derselben Ebene ebenfalls dadurch zu lösen sei, dass durch die n Punkte ein gleichseitiges n-Eck gelegt wird mit der analogen Eigenschaft. Damit wird aber, für $n > 3$, etwas Unmögliches gefordert; denn von den n Seiten verlangt man, 1) dass sie ein gleichseitiges Polygon bilden, was $n-1$ Bedingungen sind, 2) die Incidenz mit den n gegebenen Punkten: n Bedingungen, 3) die Concurrenz der Lothe: $n-2$ Bedingungen, also im Ganzen $2n-3$, d. i. $n-3$ mehr als sie erfüllen können. —

Haben wir so den Punkt kleinster Summe für 3 gegebene Punkte ermittelt (Nr. 3 und 6), so kann man auch nach *dem Punkt grösster Entfernungssumme* fragen, *wobei man sich natürlich auf den Innenraum des Dreiecks (mit Einschluss des Umfangs) beschränken muss. Es ist dies in allen Fällen*

derjenige Eckpunkt, an dem sich der kleinste Winkel befindet; ich unterdrücke den Beweis dafür*).

7. Bei 4 Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 einer Ebene, von denen keiner vom Dreiecke der andern eingeschlossen wird, müssen MA_1, ... mit den Seiten eines Rhombus in Richtung und Sinn übereinstimmen: d. h. je zwei müssen dieselbe Richtung, aber entgegengesetzten Sinn haben: so dass *M der Diagonalschnittpunkt des Vierecks der A_i ist,* für den die Minimal-Eigenschaft bekannt ist und auf die elementarste Weise direct bewiesen werden kann. Dass, im Falle einer der 4 Punkte im Dreieck der andern liegt, kein solcher Punkt möglich ist, ist hier sofort zu erkennen, aber vielfach ist dieser andere Fall ganz unbeachtet gelassen.

Aber man ersieht auch, dass, wenn die Punkte A_i ein gemeines Viereck bilden, die Senkrechten in ihnen auf den MA_i nur ein Parallelogramm, nicht ein gleichseitiges Viereck bilden, wie es der Fall sein müsste, wenn die in Anm. 11) behandelte *Steiner*sche Construction verallgemeinbar wäre.

8. Wesentlich interessanter ist *der Vierstrahl $M(A_1, A_2, A_3, A_4)$ um den Minimumspunkt bei einem Tetraeder, von welchem keine Ecke der Bedingung* (7.) *genügt.* Indem nun die vier Strecken MA_1, ... mit den Seiten eines räumlichen gleichseitigen Vierecks in Richtung und Sinn übereinstimmen und die Diagonalen auch eines solchen Vierecks rechtwinklig sind, ergeben sich folgende Eigenschaften des Vierstrahls:

1) *Je zwei Winkel A_1MA_2 und A_3MA_4, A_1MA_3 und A_2MA_4, A_1MA_4 und A_2MA_3 sind gleich.*

2) *Die Halbirungslinien je der zwei gleichen Winkel fallen in dieselbe Linie, sind aber sich ergänzende Halbstrahlen.*

3) *Diese drei Halbirungslinien sind gegenseitig rechtwinklig.*

1) und wenigstens der erste Theil von 2) dürften Herrn *Wetzig* bekannt gewesen sein; ob 2) und 3) Herrn *Lindelöf* bekannt gewesen sind, kann ich nicht sehen.

Man gelangt mit Hilfe der statischen Eigenschaft ebenfalls sehr leicht zu diesen Resultaten.

*) Eine ähnliche Eigenschaft hat ein Schüler von mir, Herr *Karl Dörholt,* gefunden: Von allen Punkten im Innern eines Dreiecks hat der Schwerpunkt das grösste Product der Entfernungen von den Seiten (Ueber einem Dreiecke um- und eingeschriebene Kegelschnitte, Inauguraldissertation Münster 1884 S. 13).

Es genügt vorauszusetzen, dass z. B. A_1MA_2 und A_3MA_4 gleich sind und entgegengesetzt gerichtete Halbirungslinien haben; dann folgen die weitern Eigenschaften daraus.

Folglich erhält man eine solche vierkantige Ecke einfach dadurch, dass man den einen von zwei Scheitelwinkeln um die gemeinsame Halbirungslinie eine beliebig grosse Rotation vollführen lässt; von jedem Punkt des Raumes gehen demnach ∞^5 solcher Ecken aus.

Aus den Winkel-Gleichheiten folgt, dass die vier dreikantigen Ecken $M(A_1, A_2, A_3)$, $M(A_2, A_1, A_4)$, $M(A_3, A_4, A_1)$, $M(A_4, A_3, A_2)$ congruent sind, wobei dann die homolog geschriebenen Kanten zur Deckung gelangen. Jede der vier Ecken ist ein Viertel des Raums, ihr Excess gleich π, ihr Cosinus gleich 0. (Vergl. *Lindelöf* a. a. O.)

Diese dreikantige Ecke (sowie das zugehörige sphärische Dreieck) ***verdient eine Auszeichnung.***

Sie ist durch jede der Eigenschaften, dass der Excess gleich π oder der Cosinus gleich 0 ist, oder dass irgend eine der drei Kanten a_i mit der Verlängerung der Halbirungslinie des Winkels α_i der beiden andern den Winkel $\frac{1}{2}\alpha_i$ bildet, charakterisirt; insbesondere gilt, dass, wenn eine der Kanten die letzte Eigenschaft besitzt, sie auch den beiden andern zukommt. ***Die Halbirungslinien der drei Kantenwinkel sind zu einander senkrecht. Die drei Flächenwinkel sind sämmtlich stumpf.*** Denn ist a_1 der an der gleichnamigen Kante liegende, so ist

$$0 = 1+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3 = (1+\cos\alpha_2)(1+\cos\alpha_3)+\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos a_1,$$

woraus folgt, dass $\cos a_1 < 0$ ist. —

Während bei $n = 3$ sich M leicht als Schnittpunkt zweier (oder dreier) gewisser Kreise über den Seiten als Sehnen ergiebt, ist hier der Ort der Punkte, welche mit drei von den vier Punkten eine Ecke der besprochenen Art bilden, nicht so einfach. Er ist eine Schaale einer Fläche zwölfter Ordnung, welche die Ebene der drei Punkte in den endlichen Strecken zwischen ihnen senkrecht durchschneidet und aus zwei in Bezug auf diese Ebene symmetrischen ziemlich einfach gestalteten Theilen besteht. ***Der Punkt M ist als Schnitt von drei (oder vier) solchen Schaalen nicht elementar construirbar,*** jedoch lässt sich seine reelle Existenz im Falle, dass keine der Ecken des Tetraeders grösser als ein Viertel des Raums ist, nachweisen.

9. ***Der Uebergangsfall zwischen den beiden allgemeinen Fällen ist hervorzuheben.*** Er tritt dann ein, wenn einer der gegebenen Punkte, A_n,

so beschaffen ist, dass die Strecken $A_n A_1$, $A_n A_2$, ... $A_n A_{n-1}$ mit $n-1$ Seiten eines räumlichen gleichseitigen n-Ecks in Richtung und Sinn übereinstimmen; d. i. im Speciellen *a*) bei drei gegebenen Punkten, wenn $\angle A_1 A_3 A_2 = \frac{2}{3}\pi$, *b*) bei vier gegebenen Punkten derselben Ebene, wenn A_4 auf den Umfang des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ fällt, *c*) bei vier gegebenen Punkten im Raume, wenn die Ecke A_4 gleich einem Viertel des Raumes (oder ihr Cosinus 0) ist.

Es genügt dann A_n als Punkt A_i der Relation (7.), aber auch als Punkt M der Relation (6.); als Gerade MA_n haben wir die Parallele zur letzten Seite des n-Ecks zu nehmen.

Gehen wir demnach von einem Falle aus, in welchem ein der Relation (6.) genügender mit keinem der A_i identischer Punkt vorhanden ist, modificiren die Lage der gegebenen Punkte so, dass der Uebergangsfall eintritt, und gehen dann weiter, so dass wir den in Nr. 3 und 4 behandelten allgemeinen Fall haben, in welchem die letzte Seite des n-Ecks kleiner als die übrigen gleichen ist; so haben wir eine „Umartung" der Minimumsfigur. *Die Gestalt, welche die Minimumsfigur in Folge der bei der ursprünglichen Lage der gegebenen Punkte nothwendigen Bedingung* (6.) *im Uebergangsfalle, für den* (6.) *noch gilt, erhalten hat, behält sie dann in den Fällen bei, wo* (6.) *nicht mehr genügt werden kann.*

Diese Umartung dürfte bis jetzt noch wenig beobachtet sein. Es scheint mir wichtig, die Aufmerksamkeit auf dieselbe zu lenken. Ich erinnere an ähnliche Erscheinungen, die ich in § 28 und § 29 meines Aufsatzes in diesem Journale Bd. 96, S. 36 bemerkt habe. In § 28 fand ich, dass, während bei einem spitzwinkligen Dreiecke die untere Grenze des Umfangs der ihm eingeschriebenen Dreiecke der Umfang des Dreiecks der Höhenfusspunkte ist, welcher beim rechtwinkligen in die doppelte Hypotenusenhöhe übergeht, beim stumpfwinkligen diese Form des Minimums — doppelte Höhe auf der grössten Seite — bleibt, obgleich sie nicht mehr das Fusspunktendreieck vorstellt. Etwas Aehnliches ergab sich in § 29 in Bezug auf das Minimum des Umfangs der einem Kreisvierecke eingeschriebenen Vierecke.

Als etwas Analoges darf der Sectorsatz und seine Ergänzung gelten, welche ich a. a. O. § 14 und § 15 besprochen habe. Wenn ein Winkel gegeben ist und eine Linie von gegebener Länge zwischen den Schenkeln gezogen werden soll, welche mit denselben die grösste Fläche einschliesst; so ist diese Linie der Kreisbogen um den Scheitel, so lange der Winkel concav ist; er wird zum Halbkreise, wenn der Winkel flach wird, und

wächst derselbe weiter, so bleibt der Halbkreis Maximalfigur. Freilich findet eine Verschiebung statt und insofern ist die Analogie nicht vollständig; beim flachen Winkel ist der Scheitel des Winkels noch Mittelpunkt, beim convexen ist er der eine Durchmesser-Endpunkt.

Es wäre wünschenswerth, das Analogon im Raume zu untersuchen, d. h. die Fläche von gegebenem Inhalt zu ermitteln, welche von einer n-seitigen Ecke (einem Kegel) den Körper von grösstem Volumen abschneidet. Es ist nicht wahrscheinlich, dass der *Steiner*sche Satz (Werke Bd. II, S. 306 Satz IV), nach welchem die Fläche ein Stück einer Kugel um den Scheitel der Ecke ist, für jede Grösse der Ecke bestehen bleibt. Aber wann hört er auf, richtig zu sein, und welche Gestalt nimmt dann die Maximalfigur an?

Es dürfte von Werth sein, noch mehrere derartige Umartungen einer Maximal- oder Minimalfigur kennen zu lernen.

10. ***Drei Punkte in gerader Linie in der Reihenfolge*** $A_1 A_2 A_3$ stellen ein Dreieck vor, in dem $\angle A_2 > \frac{2}{3}\pi$; wie dies auch Herr *Lindelöf* bemerkt. Demnach ist A_2 Minimumspunkt; wie sich auch sofort direct zeigt.

Sind $2m$ oder $2m+1$ Punkte in gerader Linie gegeben in der Reihenfolge $A_1 A_2 A_3 \ldots$, so ist im zweiten Falle der Punkt A_{m+1}, im ersten aber jeder beliebige Punkt der Strecke $A_m A_{m+1}$ Minimumspunkt.

Bleiben wir andererseits bei drei Punkten in gerader Linie und suchen den Punkt, für den $\overline{A_1 P}^h + \overline{A_2 P}^h + \overline{A_3 P}^h$ ein Minimum ist, so findet sich, wenn wir ihn für $h = 1, 2, 3, 4$ mit $M_1, \ldots M_4$ bezeichnen, $A_1 A_3$ als positiv annehmen und $A_2 A_3 > A_1 A_2$ voraussetzen:

$$A_2 M_1 = 0, \quad A_2 M_2 = \tfrac{1}{3}(A_2 A_3 - A_1 A_2), \quad A_2 M_3 = -A_1 A_3 + \sqrt{2 A_1 A_3 . A_2 A_3}$$

und $M_3 M_4$ als die einzige reelle (und positive) Wurzel von:

$$\overline{M_3 M}^3 + \overline{M_3 M}^2 . \Sigma A_i M_3 + M_3 M . \Sigma \overline{A_i M_3}^2 + \tfrac{1}{3} \Sigma \overline{A_i M_3}^3 = 0.$$

Ist $\mathfrak{M}$ die Mitte von $A_1 A_3$, so ist:

$$A_2 \mathfrak{M} > A_2 M_4 > A_2 M_3 > A_2 M_2 > A_2 M_1 = 0.$$

Für alle diese Minimumspunkte lässt sich absolutes Minimum nachweisen.

11. Mit einigen Bemerkungen zu dem Probleme ***des Minimums der Summe der Quadrate der Entfernungen*** bei beliebiger Lage der A_i will ich schliessen. Wir schreiben die Gleichungen (1.) in der Form:

$$PA_i \cos PA_i M = MA_i - PM \cos \alpha_i,$$

quadriren und addiren sie, wodurch sich ergiebt:

$$(13.)\quad \Sigma\overline{PA}_i^2\cos PA_iM^2 = \Sigma\overline{MA}_i^2 - 2PM\Sigma MA_i\cos\alpha_i + \overline{PM}^2\Sigma\cos\alpha_i^2.$$

Ist nun M so beschaffen, dass für jeden Halbstrahl aus ihm:

$$(14.)\quad \Sigma MA_i\cos\alpha_i = 0,$$

so ist:

$$\Sigma\overline{PA}_i^2\cos PA_iM^2 = \Sigma\overline{MA}_i^2 + \overline{PM}^2\Sigma\cos\alpha_i^2,$$

also:

$$\Sigma\overline{PA}_i^2 > \Sigma\overline{MA}_i^2$$

und das absolute Minimum für ihn bewiesen.

Ersetzen wir wieder M durch A_n, quadriren und addiren die $n-1$ ersten Gleichungen, so ist:

$$\sum_1^{n-1}\overline{PA}_i^2\cos PA_iA_n^2 = \Sigma\overline{A_nA}_i^2 - 2PA_n\sum_1^{n-1}A_nA_i\cos\alpha_i' + \overline{PA}_n^2\sum_1^{n-1}\cos\alpha_i'^2;$$

oder

$$\sum_1^{n-1}\overline{PA}_i^2\cos PA_iA_n^2 + \overline{PA}_n^2 = \Sigma\overline{A_nA}_i^2 + PA_n\left\{PA_n\left(1+\sum_1^{n-1}\cos\alpha_i'^2\right) - 2\sum_1^{n-1}A_nA_i\cos\alpha_i'\right\}.$$

Damit A_n Minimumspunkt sei, muss für alle Halbstrahlen aus ihm:

$$(15.)\quad \sum_1^{n-1}A_nA_i\cos\alpha_i' = 0$$

sein; denn andernfalls hat diese Grösse für zwei sich ergänzende Halbstrahlen entgegengesetzt gleiche Werthe; und wir werden dann P auf einem „positiven" Halbstrahle dem A_n so nähern können, dass die Klammer von PA_n negativ wird, und indem dabei gleichzeitig die $\cos PA_iA_n$ auf 1 zustreben, gelangen wir so zu Punkten P, bei denen $\Sigma\overline{PA}_i^2 < \Sigma\overline{A_nA}_i^2$.

Die Bedingung (15.), *unter der im jetzigen Falle einer der gegebenen Punkte Minimumspunkt wird, unterscheidet sich aber wesentlich von der Bedingung* (7.). Sind die Punkte $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ gegeben, so wird durch (7.) der gesammte Raum in zwei Theile getheilt, in deren einem alle Punkte der (7.) genügen; und der beliebig gewählte Punkt A_n kann ebenso in dem einen als in dem andern liegen. Durch (15.) hingegen wird A_n auf eine Fläche eingeschränkt. Man sieht auch, dass (15.) *sich unter* (14.) *subsumirt, hingegen* (7.) *nicht unter* (6.). Jetzt reicht also die Bedingung (14.) hin; in speciellen Fällen wird M in einen der A_i fallen.

Bei der erschöpfenden Behandlung, welche das jetzige Problem in der erweiterten Form, dass die Quadrate noch mit beliebigen Coefficienten α_i multiplicirt sind, durch *Steiner* in der ausgezeichneten Abhandlung über

den Krümmungs-Schwerpunkt ebener Curven*) erfahren hat, brauchen wir in dasselbe nicht weiter einzugehen. *Steiner* findet, wenn M der Bedingung (14.) genügt und P beliebig ist, die Gleichung:

$$(16.) \qquad \Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2 = \Sigma\alpha_i\overline{MA}_i^2+\overline{MP}^2.\Sigma\alpha_i;$$

so dass M Minimums- oder Maximumspunkt ist, je nachdem $\Sigma\alpha_i > $ oder < 0 ist, und $\Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2$ für alle Punkte einer Kugel um M denselben Werth hat. In Bezug auf den Fall: $\Sigma\alpha_i = 0$ aber scheint er sich, wie der Schluss von § 16 beweist, in einem Irrthum befunden zu haben. In diesem Fall ist das letzte Glied von (16.) nicht zu unterdrücken und also $\Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2$ nicht für alle Punkte des Raums constant, da M sich im Unendlichen befindet, also MP unendlich gross ist. M ist bekanntlich der Schwerpunkt der mit den Gewichten α_i belasteten Punkte A_i; sei M' derjenige der $n-1$ ersten Punkte, so findet man im erwähnten Falle:

$$\Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2 = \sum_1^{n-1}\alpha_i\overline{M'A}_i^2+\alpha_n(\overline{PA}_n^2-\overline{PM'}^2).$$

Die Differenz $\overline{PA}_n^2-\overline{PM'}^2$ und also auch $\Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2$ ist nur constant für alle Punkte P jeder Ebene, welche senkrecht ist zu der nach M gehenden Geraden A_nM'. Diese Ebenen treten an Stelle der obigen Kugeln. Sollten freilich M' und A_n identisch sein (oder, was dasselbe, irgend zwei und in Folge dessen jede zwei Gruppen, in die man die Punkte α_iA_i zerlegt, identische Schwerpunkte haben), dann wird $\Sigma\alpha_i\overline{PA}_i^2$ für alle Punkte des Raumes constant.

Was nun die Anwendung auf Fusspunkten-Polygone in § 16 anlangt, so genügt die Bedingung:

$$\Sigma(\sin 2A_i) = 0$$

noch nicht für die Constanz des Inhalts derselben: sie wird offenbar von jedem Trapeze, jedem Sehnenvierecke erfüllt; hingegen erfüllt jedes Parallelogramm die weitere für die Constanz nothwendige Bedingung.

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1838; dieses Journal Bd. 21, S. 33, 101; Werke Bd. II, S. 97. — Die Beschränkung in § 3 auf positive Coefficienten lässt *Steiner* selbst später fallen, und ebenso ist die Beschränkung auf die Ebene ohne Bedeutung.

Münster i. W., September 1883, April 1884.

Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades.

(Von Herrn *Adolf Ameseder* in Wien.)

Nullsysteme höheren Grades wurden bis jetzt wenig untersucht: sehen wir von dem *Reye*schen Nullsystem von neun Dimensionen ab *), da in demselben Flächen zweiten Grades die Elemente sind, so haben wir nur eine Publication von Herrn *Sturm* **) als einschlägig zu verzeichnen. In dieser werden neben andern Correlationen ein räumliches Nullsystem vom dritten Grade und das von uns in den Sitzungsberichten der K. Akademie in Wien ***) veröffentlichte ebene Nullsystem zweiten Grades besprochen, für dessen Allgemeinheit Herr *Sturm* einen besonderen Beweis erbringt.

Die vorliegende Arbeit mag daher als Beitrag zu diesem im Werden begriffenen Theil der Geometrie nicht ohne Interesse erscheinen. Sie behandelt das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades — neben dem linearen wohl das bemerkenswertheste — und bringt gleich auch eine Anwendung desselben, nämlich die Abbildung der *Kummer*schen Fläche mit Doppelkegelschnitt auf eine Quadrifläche; sie zeichnet in ihrer Entwicklung jedoch auch den Weg vor, der bei einer geometrischen Untersuchung aller andern Nullsysteme zu betreten wäre.

§ 1.

Allgemeines über Nullsysteme höheren Grades.

1. Zwei Eigenschaften sind es, welche das allgemeine Nullsystem definiren, und welche nothwendig sind für die Deduction seiner weiteren Eigenthümlichkeiten:

*) Dieses Journal, Bd. 82, pag. 202.
**) Math. Annalen, Bd. 19, pag. 474 u. 477.
***) Jahrgang 1881 (Bd. 83, II. Abth.) pag. 385.

a) Einem Punkte entsprechen im Allgemeinen höchstens α durch ihn gelegte Ebenen, und einer Ebene von allgemeiner Stellung nicht mehr als β in ihr befindliche Punkte.

b) Die Nullpunkte der Ebenen eines Bündels haben eine Fläche $(n+\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zum geometrischen Ort.

2. Im Allgemeinen gehört von den Nullebenen E eines Flächenpunktes e nur *eine* dem Bündel $m[E]$ an. Eine Ausnahme findet statt, wenn er ein mehrfacher Punkt oder der Berührungspunkt einer Tangente aus m ist. Das Erstere hat für m selbst Geltung. Dieser erscheint als Nullpunkt zu α Ebenen coordinirt, die alle Elemente des Bündels sind, nämlich allen seinen Nullebenen. Er ist als α-facher Punkt der Fläche $f^{n+\alpha-1}$ zu betrachten.

3. Der Ort der Nullpunkte e eines Büschels $\gamma[E]$ trifft jede Ebene E desselben in nicht mehr als β *variablen* Punkten, weil E jedem mit ihrer Stellung sich ändernden Schnitte mit dieser Curve $r^{n+\beta-1}$ als Nullebene zugehören muss und die Zahl ihrer Nullpunkte der Voraussetzung nach gleich β ist; ferner begegnet sie ihrer Nullcurve an $n-1$ *fixen* Stellen. Diese sind für den Fall, dass m irgendwo auf γ liegt, was stets angenommen werden kann, die einfachen Treffpunkte s_1, s_2, ... s_{n-1} dieser Linie mit der Nullfläche $f^{n+\alpha-1}$ von m. Jedem kommt ja offenbar eine Nullebene zu, die ihn und m, also γ der ganzen Ausdehnung nach enthält.

4. Die Nullebenen E eines ebenen Punktsystems $M(e)$ hüllen eine Fläche $F_{n+\beta-1}$ ein, die M in ihren β Nullpunkten berührt und so viele Tangentialebenen E durch eine beliebige Gerade γ schickt, als M und die $\gamma[E]$ entsprechende Curve $r^{n+\beta-1}$ Durchschnittspunkte aufweisen. $r^{n+\beta-1}$ ist von $(n+\beta-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; $n+\beta-1$ ist also die Klassenzahl von $F_{n+\beta-1}$, und $n-1$ die Zahl ihrer einfachen durch einen Strahl der Ebene M festgelegten Berührungsebenen.

5. Einer geraden Reihe $\gamma[e]$ ist im System eine Developpable $R_{n+\alpha-1}$ von der $(n+\alpha-1)^{\text{ten}}$ Klasse coordinirt. Die Tangentialebenen E_x, welche aus einem Punkte m an sie möglich sind, entsprechen als Nullebenen einzeln den $n+\alpha-1$ Treffpunkten von γ mit der Nullfläche $f^{n+\alpha-1}$ von $m[E]$. Verlegt man m auf γ nach m_1, so werden α von den $n+\alpha-1$ Ebenen E_x zu den Nullebenen dieses Punktes, während die $n-1$ andern den einfachen Schnitten s von γ mit $f_1^{n+\alpha-1}$ in dieser Eigenschaft zugehören. Sie enthalten γ der ganzen Ausdehnung nach, sind von der speciellen Wahl des Punktes

m_1 auf γ unabhängig und kennzeichnen diese Gerade als $(n-1)$-fache Axe von $R_{n+\alpha-1}$.

6. Auffallend in den Resultaten der vorstehenden Auseinandersetzung ist das wiederholte Auftreten des Werthes $n-1$. Derselbe repräsentirt die Anzahl:

a) der einfachen Schnittpunkte eines beliebigen Strahls γ aus m mit $f^{n+\alpha-1}$:

b) der einfachen Tangentialebenen, welche ein Strahl γ von M mit $F_{n+\beta-1}$ festlegt;

c) der Stellen, in welchen irgend eine Gerade γ ihrer Nullcurve $r^{n+\beta-1}$ begegnet, und

d) derjenigen Ebenen durch γ, welche die dieser Linie zugeordnete Developpable $R_{n+\alpha-1}$ berühren.

Wir nennen diese constante Zahl deshalb den *Modul* des Nullsystems. Die Zahlen α und β bezeichnen wir als *Charakteristiken;* sie liefern um den Modul vermehrt die *Ordnungs-* und die *Klassenzahl* $n+\alpha-1$, bezw. $n+\beta-1$, des Nullsystems.

7. Ist nun d irgend eine abwickelbare Fläche und r ihre Nullcurve, so lässt sich die Ordnungszahl Ω der letzteren aus der Klassenzahl μ der ersteren leicht berechnen. d hat mit der zu einer beliebigen Ebene M gehörigen $F_{n+\beta-1}$ stets $\mu[n+\beta-1]$ Tangentialebenen E_x gemein, und jede E_x besitzt β Nullpunkte, von denen einer sich in M befindet. Es ist sonach $\Omega=\mu[n+\beta-1]$.

In gleicher Weise lassen sich auch die den Art. 2, 3 und 5 analogen allgemeinen Fälle erledigen. Das Resultat ist allemal das folgende:

„*Im räumlichen Nullsystem mit dem Modul* $n-1$ *und den Charakteristiken* α *und* β *ist das Verhältniss zwischen der Gradzahl*

einer Developpablen, bezw. der einer Punktfläche, und jener ihres Nullgebildes $1:(n+\alpha-1)$.“	*einer Curve, resp. der einer Enveloppe, und jener ihres Nullgebildes* $1:(n+\beta-1)$.“

Unter Gradzahl ist hier bei Curven und Punktflächen ($r^{(n+\beta-1)r}$, $f^{(n+\alpha-1)\nu}$) die Ordnungszahl, bei Developpablen und Enveloppen ($R_{(n+\alpha-1)x}$, $F_{(n+\beta-1)\nu}$) die Klassenzahl gemeint.

8. Die Durchschnittscurve zweier Nullflächen $f_{\mathrm{I}}^{n+\alpha-1}$ und $f_{\mathrm{II}}^{n+\alpha-1}$ zerfällt in drei ihrer Bedeutung nach wesentlich verschiedene Theile:

I. die Nullcurve $r^{n+\beta-1}$ der Linie $\overline{m_{\rm I} m_{\rm II}}$,

II. die Curve d, welche die Eigenschaft hat, dass von den α Nullebenen eines jeden ihrer Punkte eine durch $m_{\rm I}$ und eine zweite, davon verschiedene durch $m_{\rm II}$ geht, und

III. den geometrischen Ort c jener singulären Punkte, von denen jeder ∞^1 Nullebenen besitzt.

Die Curve d steht in sehr innigem Zusammenhang mit der Enveloppe G derjenigen Nullebenen der Punkte von $f_{\rm I}^{n+\alpha-1}$, die nicht zum Bündel $m_{\rm I}(E)$ gehören; sie ist nämlich ein Theil jener Curve, welche im System dem G aus $m_{\rm II}$ umschriebenen Kegel zukommt. Solcher Curven d giebt es auf jeder $f^{n+\alpha-1}$ ∞^3; durch drei Punkte sind $(\alpha-1)^3$ gegeben.

Während $r^{n+\beta-1}$ und d variiren, bleibt c fest, und zwar im Verein mit den auf allen $r^{n+\beta-1}$ befindlichen Hauptpunkten a, deren jedem ∞^2 Nullebenen entsprechen.

Dual sind alle $F_{n+\beta-1}$ einer singulären Developpablen Δ und dem von den Hauptebenen A formirten Polyeder eingeschrieben.

9. Setzt man $\beta = \alpha = 1$, so werden die beiden Verhältnisse in Art. 7 zu $1:n$, und man gewinnt das allgemeinste projectivische Nullsystem:

„*Das allgemeine projectivische Nullsystem ist von derselben Ordnung und Klasse*".

In demselben entspricht jedem Gebilde ersten Grades ein correlatives Gebilde $n^{\rm ten}$ Grades: dem Ebenenbüschel eine Raumcurve $n^{\rm ter}$ Ordnung, der Geraden eine Developpable $n^{\rm ter}$ Klasse, dem ebenen System und dem Bündel Flächen $n^{\rm ter}$ Klasse, bezw. $n^{\rm ter}$ Ordnung.

Bemerkenswerth für die projectivischen Nullsysteme ist ferner das Verschwinden des Curvensystems d. Alle d coincidiren mit der singulären Curve c.

§ 2.

Die Singularitäten des quadratischen Nullsystems.

10. Der kleinste Werth, den der Modul noch annehmen kann, soll $f^{n+\alpha-1}$ nicht in mehrere durch m laufende Ebenen zerfallen, ist $n-1=1$. Für das eigentliche Nullsystem zweiter Ordnung ist folglich α stets auch gleich 1. In der That ziehen die Gleichungen $n-1=1$ und $n+\alpha-1=2$ mit Nothwendigkeit den Werth $\alpha=1$ nach sich.

Dieses Resultat sagt nach Art. 1 aus, dass in dem Nullsystem, in welchem den Ebenen eines beliebigen Bündels $m[E]$ die Punkte einer Quadrifläche f^2 entsprechen, jede Ebene E einen einzigen Nullpunkt e besitzt.

Der Art. 5 lehrt weiter, dass in diesem speciellen Fall einer geraden Reihe $\gamma(e)$ ein Kegel zweiter Klasse R_2 zukommt, der sowohl von γ selbst als auch von *allen* Nullebenen der Punkte dieser Linie tangirt wird. Hieraus schliessen wir durch Umkehrung, dass jedem Punkte e_x von γ nur eine Nullebene E_x coordinirt ist; denn ausser der festen Tangentialebene S, welche γ mit R_2 festlegt und die dem Contactpunkte s von γ mit R_2 im System entspricht, lässt sich durch jeden Punkt e_x nur noch *eine* Ebene berührend an R_2 legen. Da dies für jede Gerade $\gamma(e)$ gilt, so ist auch die Charakteristik $\beta = 1$ und infolge dessen $n+\beta-1 = 2$. D. h.:

„Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiter Ordnung ist projectivisch und von der zweiten Klasse."

11. Einem Ebenenbüschel $m[E]$ erscheint eine Fläche zweiter Ordnung f^2 coordinirt, welche in m die Nullebene dieses Punktes tangirt; einem Büschel $\gamma[E]$ ein Kegelschnitt r^2, der f^2 aufgeschrieben ist, wenn γ dem Bündel angehört. Dieser Kegelschnitt berührt in dem zweiten Schnitte s von γ und f^2 die Nullebene S dieses Punktes, da er projectivisch und perspectivisch auf $\gamma[E]$ bezogen ist.

12. Die Nullcurve r_{I}^2 irgend eines andern in $m[E]$ enthaltenen Büschels $\gamma_{\mathrm{I}}[E]$ trifft r^2 an zwei Stellen: dem Nullpunkte e_{I} der Ebene $(\gamma\gamma_{\mathrm{I}}) \equiv E_{\mathrm{I}}$ und einem Punkte a, der im System eine ausgezeichnete Stellung einnimmt.

Vor allem erhellt, dass er im allgemeinen von e_{I} verschieden ist, da ja von den ∞^2 auf f^2 verlaufenden Nullkegelschnitten nicht ein jeder alle andern berühren kann; ferner ist ersichtlich, dass ihm zwei verschiedene Nullebenen zugewiesen erscheinen, nämlich sowohl $[a\gamma]$ als auch $(a\gamma_{\mathrm{I}})$, weil er auf r^2 und r_{I}^2 liegt. Beide Ebenen berühren nach Art. 11 die Nullcurve von $\overline{ma}$ in a; diese degenerirt infolge dessen in die zwei in a zusammentreffenden Generatrices ε_1, ε_2 von f^2 und hat alle Ebenen des Bündels um a und also auch jene des Büschels $\overline{ma}[\mathfrak{A}]$ zu Tangentialebenen. Laut Art. 11 entspricht demnach der Punkt a allen $\mathfrak{A}$ als Nullpunkt und gehört, weil ein beliebiger Punkt des Raumes eine $\mathfrak{A}$-Ebene fixirt, allen Nullflächen f^2 an.

Als singulär erkennt man ferner $(m\varepsilon_1)$ und $(m\varepsilon_2)$. Der Ebene $(m\varepsilon_1) \equiv L_1$

ist jeder Punkt e_1' von ε_1 als Nullpunkt zuzuweisen, da er in ihr und auf dem aus ε_1 und ε_2 bestehenden Nullkegelschnitte von $\overline{ma}[\mathfrak{A}]$ liegt.

13. Die Nullfläche f_1^2 eines zweiten Punktes m_1 schneidet f^2 ausser in der Nullcurve r^2 von $\overline{mm_1}(E) \equiv \gamma(E)$ in einem andern Kegelschnitte c^2, der im allgemeinen a nicht enthält. Der Voraussetzung nach kommen nur den Punkten von r^2 Ebenen aus $\gamma[E]$ zu; es erscheint daher einem Punkte c von c^2 in jedem der zwei Bündel $m[E]$, $m_1[E]$ eine besondere Ebene E', resp. E_1', coordinirt. Dies zeigt weiter, dass c^2 sich nicht ändert, wenn m_1 auf γ fortgleitet, da im conträren Falle jeder Punkt von f^2 zwei getrennte Nullebenen besitzen, und das Nullsystem kein eindeutiges sein würde. In c^2 durchdringen sich folglich die Nullflächen aller Punkte von γ, und weil γ mit jedem andern Strahl aus m vertauscht werden kann, allgemein die Nullflächen sämmtlicher Punkte des Raumes. In einem gegebenen Bündel findet sich zu jedem Punkte c von c^2 eine entsprechende Ebene.

14. Die Nullflächen von irgend zwei Punkten haben c^2 und a gemein, ihr weiterer Schnitt r^2 läuft demzufolge stets durch a, den „Hauptpunkt" des Systems. Dieser ist allen r^2 gemeinschaftlich und entspricht jeder ihn tragenden Ebene als Nullpunkt; er ist ferner das Centrum des von den singulären Ebenen L umhüllten Kegels C_2, der ersichtlich von der zweiten Klasse ist, da sich durch jeden Strahl $\overline{am}$ nur zwei Ebenen L, nämlich L_1 und L_2 legen lassen. Die zugehörigen Linien ε_1, ε_2 sind Secanten von c^2, wie die Art. 12 und 13 lehren; sie sind Seiten des c^2 aus a projicirenden Kegels K^2, der auf C_2 ein-eindeutig bezogen ist.

Das letztere lässt sich folgendermassen nachweisen:

Die Ebenen $\mathfrak{A}$ jener r^2, welche den Geraden γ einer festen Ebene M zugeordnet sind, bilden ein Büschel, dessen Axe α den Hauptpunkt a mit dem Nullpunkte m von M verbindet, und in dieser Weise durch M vollkommen bestimmt ist. Enthält M speciell den Punkt a, so verläuft $\overline{am}$ in ihr; tangirt sie überdies den Kegel C_2, d. h. wird sie zu einer L-Ebene, so coincidirt $\overline{am}$ mit der coordinirten ε-Linie. — Umgekehrt ist auch L durch ε eindeutig fixirt, und zwar als Nullebene irgend eines von a und c verschiedenen Punktes e'' dieser Geraden.

15. Die dualen Betrachtungen lehren: 1) dass alle R_2 und alle F_2 eine gemeinsame Tangentialebene A besitzen, welche Hauptebene des Systems ist; 2) dass die R_2 den singulären Kegel C_2 an zwei Stellen berühren und

die F_2 ihm vollständig eingeschrieben sind; 3) dass auf jedem Strahl δ in A zwei Punkte c_1, c_2 sich vorfinden, von denen jeder ein ganzes Büschel $\tau'_1(E'')$, resp. $\tau'_2(E'')$, von Nullebenen besitzt; und 4) dass die Axen τ' den Schnitt T_2 von A mit C_2 zur Enveloppe haben. Sie beweisen endlich auch, und zwar in Verbindung mit dem Vorausgeschickten, dass der Ort des Punktepaares c_1, c_2 der Kegelschnitt c^2, und also die Ebene von c^2 identisch mit A ist:

„Charakteristisch für das quadratische Nullsystem ist das Vorkommen

1. eines Ebenenbündels $a[\mathfrak{A}]$, dessen sämmtliche Elemente Nullebenen des Mittelpunktes a sind,

2. einer Curve zweiter Ordnung c^2, die aus Punkten besteht, von denen jeder ein Büschel $\tau[E]$ von Nullebenen besitzt.

I. eines ebenen Punktsystems $A[\mathfrak{a}]$, dessen sämmtliche Elemente Nullpunkte der Trägerebene A sind,

II. eines Büschels zweiter Ordnung C_2, das aus Ebenen besteht, von denen jede einer geraden Reihe $\varepsilon(e)$ von Nullpunkten coordinirt ist.

Der singuläre Kegelschnitt c^2 befindet sich in der Hauptebene A, und der singuläre Kegel C_2 hat den Hauptpunkt a zum Centrum. Die Axen τ hüllen die Schnittcurve T_2 von A und C_2 ein, und die Geraden ε bilden die Seiten des Kegels K^2, der c^2 aus a projicirt.“

§ 3.

Relationen zwischen Gebilden, welche einander im Nullsystem entsprechen.

16. An eine Developpable n^{ter} Klasse D_n lassen sich aus a im allgemeinen n verschiedene Tangentialebenen $\mathfrak{A}$ legen, ferner besitzt sie $2n$ Ebenen E'', welche T_2 tangiren. Für jede $\mathfrak{A}$ rückt ein Punkt e der Nullcurve r^{2n} von D_n nach a, und jeder E'' entspricht im System ein Schnittpunkt von c^2 mit r^{2n}: Diese Curve hat in a einen n-fachen Punkt und wird von c^2 an $2n$ Stellen getroffen.

Besitzt D_n eine ξ-fache Ebene X, so erhält r^{2n} in dem Nullpunkte x von X einen $(\xi-1)$-fachen Knoten. Ist jedoch A diese mehrfache Ebene, so reducirt sich die Ordnungszahl $o = 2n$ von r^{2n} auf $2n-\xi$. Unter den $2n$ Tangentialebenen, welche D_n mit der Nullfläche F_2 einer beliebigen Ebene M bestimmt, ist nämlich nun A ξ-fach mit enthalten; es bleiben sonach nur $2n-\xi$ Ebenen E zurück, welchen in M befindliche Punkte e von r zukommen.

Eine Erniedrigung von o um η zieht das Auftreten von η solchen Ebenen L_x nach sich, welche D_n und C_2 tangiren, da die η Nullgeraden ε_x dieser Ebenen als Bestandtheile von r^{2n} herausfallen. Ist eine der L-Ebenen ζ-fach für D_n, so ist auch die zugehörige ε-Linie so oft zu zählen; ist überdies die Berührungserzeugende beiden Developpablen gemein, so erniedrigt sich o um eine weitere Einheit.

Ist D_n ein Kegel, so liegt r^{2n} auf einer Fläche zweiter Ordnung, der Nullfläche f^2 des Kegelmittelpunktes m; befindet sich m auf A, etwa in $\mathfrak{a}$, so ist r^{2n} eine ebene Curve, da f^2 in zwei Ebenen zerfällt, nämlich in A und eine Ebene $\mathfrak{A}$ des Bündels um $\mathfrak{a}$.

17. Einer Fläche n^{ter} Klasse F_n ist eine Nullfläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung f^{2n} coordinirt, welche c^2 zur n-fachen Linie hat, da jede Tangente τ von T_2 n Tangentialebenen von F_n bestimmt, die alle denselben auf c^2 liegenden Nullpunkt c besitzen. Eine Ebene $\mathfrak{A}$ bestimmt mit f^{2n} eine Schnittcurve r^{2n}, die dem Kegel entspricht, der sich aus dem zugeordneten Punkte $\mathfrak{a}$ der Fläche F_n umschreiben lässt. Sie hat a zum n-fachen Punkte, folglich f^{2n} denselben zum $(n-1)$-fachen Knoten. In diesem begegnen sich die $2n$ Geraden, welche man stets auf f^{2n} findet, da sie als Nullreihen einzeln den $2n$ gemeinsamen Berührungsebenen von F_n und C_2 zugewiesen sind.

Weist F_n eine π-fache Ebene P auf, so hat f^{2n} in ihrem Nullpunkte p einen π-fachen Punkt. Man überzeugt sich davon am einfachsten dadurch, dass man zu einer in P liegenden Axe γ den Nullkegelschnitt r^2 construirt. Von seinen $4n$ Schnittpunkten mit f^{2n} erscheinen π in p vereinigt, weil unter den Tangentialebenen durch γ an F_n die Ebene P π-mal zu zählen ist. Coincidirt P mit A, so degenerirt f^{2n} in diese Ebene und eine Fläche $(2n-\pi)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher c^2 nur mehr $(n-\pi)$-mal aufgeschrieben ist. Ist ihr ausserdem der Kegel C_2 ϱ-mal umschrieben, so wird auch dieser zum parasitischen Bestandtheil, und zwar $2\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, so dass die eigentliche Fläche nur mehr von der Ordnung $2n-\pi-2\varrho$ ist. Natürlich gilt nun auch c^2 nur als $(n-\pi).(\varrho-1)$-fache Knotenlinie.

Erwähnt mag noch werden, dass die Nullfläche einer Regelfläche ein System von aufgeschriebenen Kegelschnitten besitzt, welche a enthalten und c^2 zweipunktig schneiden; und umgekehrt.

18. Die Developpable D_{2n}, welche einer Raumcurve n^{ter} Ordnung r^n coordinirt ist, hat A zur n-fachen Ebene, da diese die Nullebene aller

ihrer Schnitte mit r^n ist. Den Treffpunkten von r^n und K^2 sind die gemeinschaftlichen Tangentialebenen L von D_{2n} und C_2 zugewiesen.

Ist r^n mit einem $(y-1)$-fachen Knoten versehen, so hat D_{2n} seine Nullebene zur y-fachen Berührungsebene. Wenn a dieser Punkt ist, dann zerfällt D_{2n} in denselben und eine Developpable $(2n-y)^{ter}$ Klasse D_{2n-y}; welche wieder in z Ebenenbüschel $\tau_1[E'']$, $\tau_2[E'']$, ... und eine D_{2n-y-z} degenerirt, falls r^n mit c^2 an z Stellen c_1, c_2, ... zusammentrifft. etc.

Ist r^n eine Plancurve, so lässt sich D_{2n} einer Fläche zweiter Klasse, der Nullfläche der Ebene M von r^n einschreiben; gehört M als $\mathfrak{A}$ zum Bündel $a[\mathfrak{A}]$, so geht D_{2n} in einen Kegel über, dessen Spitze $\mathfrak{a}$ in A liegt und der im Verein mit a die Nullfläche von $\mathfrak{A}$ repräsentirt.

19. Das Nullgebilde einer Punktfläche n^{ter} Ordnung f^n ist eine Fläche $2n^{ter}$ Klasse F_{2n} mit der n-fachen Ebene A, dem n-fach umschriebenen Kegel C_2 und den $2n$ Geraden τ, welche den Schnittpunkten c von c^2 und f^n entsprechen.

Giebt man f^n einen σ-fachen Punkt s, so gewinnt F_{2n} im allgemeinen in der Nullebene S eine ebenso vielfache Ebene; nur, wenn s von a nicht verschieden ist, geschieht nicht dies, sondern es geht F_{2n} über in den als parasitischer Bestandtheil s-mal zu zählenden Punkt a und die eigentliche Nullfläche $(2n-s)^{ter}$ Ordnung, F_{2n-s}. Setzt man noch voraus, dass c^2 eine ψ-fache Curve von f^n ist, so hat man von F_{2n-s} den Kegelschnitt T_2 ψ-mal auszuscheiden und als f^n entsprechend nur den Rest, eine Fläche $(2n-s-2\psi)^{ter}$ Klasse, zu betrachten. etc.

Auch hier ist die Nullfläche einer Regelfläche ausgezeichnet. Ihr ist ein System von Kegeln zweiter Klasse aufgeschrieben, die alle C_2 doppelt und A einfach berühren.

20. Aus der Untersuchung der allgemeinen Nullgebilde in den letzten vier Artikeln ergeben sich durch Specialisirung einige bemerkenswerthe Resultate, welche wir anreihen wollen. So findet man durch die Substitutionen: $n = 2$, $\eta = 2$, $\xi = 0$ in Art. 16; $n = 2$, $z = 2$, $y = 0$ in Art. 18; $n = 2$, $\varrho = 1$, $\pi = 0$ in Art. 17; und $n = 2$, $\psi = 1$, $\sigma = 0$ in Art. 19 die folgenden zwei Sätze mit ihren Umkehrungen:

„Einem Kegel zweiter Klasse, der mit C_2 einen doppelten Contact eingeht, entspricht im System eine Curve zweiter Ordnung, welche c_2 zweipunktig schneidet."

„Einer Fläche zweiter Klasse, die C_2 eingeschrieben ist, ist

als Nullgebilde eine Fläche zweiter Ordnung zugewiesen, welche c^2 trägt."

Behält man den Werth 2 für n, η, z, und 1 für ϱ und ψ bei, setzt jedoch überdies voraus, dass A zur Tangentialebene von D_2 und F_2, bzw. a zu einem Punkte von r^2 und f^2 wird, dann werden ξ, y, π und σ gleich 1, und man erhält vier Sätze, von denen je zwei dual sind.

„Ein Kegel zweiter Klasse, der C_2 doppelt und A einfach berührt, entspricht stets einer geraden Reihe $\gamma(e)$ als Nullgebilde."

„Eine jede Fläche zweiter Klasse, welche A tangirt und C_2 eingeschrieben ist, ist die Enveloppe der Nullebenen eines planen Punktsystems $M(e)$."

„Ein Kegelschnitt, der durch a geht und c^2 an zwei Stellen trifft, ist als Nullcurve allemal einem Ebenenbüschel $\gamma(E)$ coordinirt."

„Eine jede Fläche zweiter Ordnung, welche sowohl a als auch c^2 enthält, ist der geometrische Ort der Nullpunkte eines centralen Ebenenbündels $m[E]$."

21. Vergleicht man den Inhalt der Art. 16 und 18 mit jenem der Art. 17 und 19, überblickt man ferner die Ergebnisse des § 1 und des Art. 20; so erkennt man, dass jedes Resultat, welches sich auf den Zusammenhang bezieht, der zwischen einem von Ebenen E formirten Gebilde $\Sigma(E)$ und seinem Nullgebilde $\sigma(e)$ besteht, auch dann richtig und wahr bleibt, wenn man durchgehends die Elemente: Ebene E und Punkt e vertauscht und consequent A mit a, C_2 mit c^2 etc. verwechselt; dass es aber nun eine Relation zwischen den zu $\Sigma(E)$ und $\sigma(e)$ reciproken Gebilden zum Ausdruck bringt. D. h.:

„Im quadratischen Nullsystem befinden sich die zu einem Gebilde $\Sigma(E)$ und seinem Nullgebilde $\sigma(e)$ reciprok verwandten Gebilde ebenfalls in der durch ein solches System vermittelten Beziehung: das Nullsystem steht sich selbst reciprok gegenüber."

§ 4.

Correlationen, welche das Nullsystem erzeugen.

22. Im sechzehnten Artikel ist bereits bemerkt worden, dass die Nullfläche eines Bündels $m[E]$ in dem speciellen Fall, wo der Mittelpunkt

m sich auf A in $\mathfrak{m}'$ befindet, degenerirt, und zwar in A, weil diese Ebene alle in ihr liegenden Punkte zu Nullpunkten hat, und in eine Ebene $\mathfrak{A}$, welche die Nullpunkte aller andern E und somit auch a enthält.

Wir bezeichnen die Trace von $\mathfrak{A}$ in A mit δ und weisen sie $\mathfrak{m}'$ zu. Dadurch gewinnen wir in A zwei reciproke ebene Systeme σ und σ'; denn ist $\mathfrak{m}'_1$ irgend ein anderer Punkt von A, so kommt erstens auch diesem nur eine Ebene $\mathfrak{A}_1$ und folglich eine einzige Gerade δ_1 zu, und zweitens ist auch allemal zu δ und $\mathfrak{A}$ nicht mehr als ein Punkt $\mathfrak{m}'$ coordinirt, den man als Schnitt von A mit den Nullebenen E_1, E_2 irgend zweier Punkte e_1, e_2 von $\mathfrak{A}$ leicht angeben kann.

Die Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ haben eine gerade Reihe α von Punkten: $e_1, e_2, \ldots$ gemein, deren Nullebenen $E_1, E_2, \ldots$ nothwendig durch $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}'_1$ laufen, mithin ein Büschel mit der Axe $\overline{\mathfrak{m}'\mathfrak{m}'_1} \equiv \beta'$ bilden. Der Strahl α ist also auch den Ebenen $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$, welche den weiteren Punkten $\mathfrak{m}'_2, \mathfrak{m}'_3, \ldots$ von β' entsprechen, eigen; jene Ebenen formiren das Büschel $\alpha[\mathfrak{A}]$, dessen Schnitt $\mathfrak{e}[\delta]$ mit A im Systeme σ der geraden Reihe $\beta'[\mathfrak{m}']$ von σ' beigeordnet ist. — Wir bezeichnen α als Hauptlinie und β' als die zu α gepaarte oder conjugirte Hauptaxe.

23. Zu derselben ebenen Correlation führt das Nullsystem auch auf einem andern Wege. Wir können nämlich A zur Bildebene und a zum Projectionscentrum wählen; dann ist $\mathfrak{e}$ das Bild aller $e_1, e_2, \ldots$ von α, ferner β' die Trace aller zugehörigen $E_1, E_2, \ldots$, endlich ist durch $\sigma\sigma'$ die Beziehung zwischen der Gesammtheit dieser Tracen β' und jener der entsprechenden Bilder $\mathfrak{e}$ charakterisirt.

Rückt $\mathfrak{e}$ auf die Punktkerncurve der Correlation nach c, so wird die Linie β', die für diese Lage mit τ' bezeichnet werden soll, mit c incident, und alle die Schnitte $e_1, e_2, \ldots$ von α mit dem Büschel $\beta'[E] \equiv \tau'[E]$ fallen in c zusammen. c entspricht einem ganzen Büschel $\tau'[E]$ als Nullpunkt, er ist ein Punkt des singulären Kegelschnittes, und dieser mit der erwähnten Kerncurve identisch. Dass die Kernenveloppe von T_2 nicht verschieden, ist nun wohl selbstverständlich.

„Das Bündel, welches die Punkte des Raumes aus dem Hauptpunkte projicirt, ist reciprok bezogen auf das ebene Strahlsystem, in welchem die Hauptebene die Nullebenen jener Punkte schneidet.

Beide Grundgebilde bestimmen

in der Hauptebene eine lineare Correlation, deren Punktkerncurve der singuläre Kegelschnitt, und deren Kernenveloppe der Schnitt mit dem singulären Kegel ist."

um den Hauptpunkt eine lineare Correlation, deren Kerndeveloppable der singuläre Kegel ist, und deren Strahlkernkegel den singulären Kegelschnitt projicirt."

24. Gestützt auf diese Relation, *kann man das Nullsystem mit dem Lineal vervollständigen, wenn der Hauptpunkt a, die Hauptebene A und vier Punkte e_1, e_2, e_3, e_4, von denen keine zwei mit a in gerader Linie liegen, mit ihren Nullebenen E_1, E_2, E_3, E_4 gegeben sind.* Man projicirt e_1, e_2, e_3, e_4 aus a auf A nach $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$, bringt ferner A mit E_1, E_2, E_3, E_4 in β'_1, β'_2, β'_3, β'_4 zum Schnitt und weist diese Linien den Punkten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, $\mathfrak{e}_4$ der Reihe nach zu. Legt man diese Correlation der Construction zu Grunde, so erhält man zu einem beliebigen Punkte e die Nullebene, indem man e aus a nach $\mathfrak{e}$ projicirt, zu $\mathfrak{e}$ die entsprechende Gerade β' aufsucht und diese mit e durch E verbindet; umgekehrt gewinnt man e, wenn E gegeben ist, dadurch, dass man $\mathfrak{e}$ aus a auf E projicirt. etc.

25. Aus der Wahrnehmung, dass $a[\alpha]$ und $A[\beta']$ als reciproke Gebilde unendlich vielen räumlichen Correlationen Σ, Σ' gemein sind, ergiebt sich noch die folgende Construction

des Nullpunktes einer Ebene E:

Man betrachtet E als Element von Σ' und ermittelt den ihr in Σ zukommenden Punkt p. Die Projection von p aus a auf E ist der Nullpunkt e.

der Nullebene eines Punktes e:

Man sieht e als Element von Σ an und construirt die ihm in Σ' zugeordnete Ebene P'. Der Schnitt β' von P' mit A legt im Verein mit e die Nullebene E fest.

Um eine solche Correlation herzustellen, nehme man vier Punkte e_1, e_2, e_3, e_4 derart an, dass sie ein Tetraeder formiren, von dessen Kanten keine durch a geht, verbinde sie mit a durch α_1, α_2, α_3, α_4 und ermittle die zugehörigen Strahlen β'_1, β'_2, β'_3, β'_4 von $A[\beta']$. Hierauf wähle man in den vier Büscheln $\beta'_1[P']$, $\beta'_2[P']$, $\beta'_3[P']$, $\beta'_4[P']$ je eine Ebene P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 und weise diese Ebenen der Reihe nach zu e_1, e_2, e_3, e_4 resp., und in derselben Weise A zu a.

Weil man jedem e_i-Punkte eine von ∞^1 Ebenen zuordnen kann, so sehen wir,

„dass es allemal ∞^4 lineare Correlationen giebt, welche in der auseinandergesetzten Weise das Nullsystem erzeugen."

Nimmt man speciell $P'_1 \equiv (\beta'_1 a)$, $P'_2 \equiv (\beta'_2 a)$, $P'_3 \equiv (\beta'_3 a)$ und verlegt e_1, e_2, e_3 nach $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, dann entsprechen sich a und A in *beiderlei* Sinn. *Solcher Systeme giebt es offenbar* ∞^1; ihre Kernflächen haben insgesammt a zum Pol von A.

26. Unter Benutzung der erklärten durch $\Sigma\Sigma'$ vermittelten Construction lassen sich alle bisher gefundenen Eigenschaften des Nullsystems neuerlich begründen und weitere Relationen entwickeln.

So sieht man sofort, dass, wenn E um eine in ihr verlaufende Gerade γ rotirt, p die reciproke Punktreihe $\varphi(p)$ beschreibt und e einen Kegelschnitt r^2 erzeugt, der als Erzeugniss von $\gamma[E]$ und $a[\alpha]$ [dem Scheine von $\varphi(p)$] a trägt und γ einpunktig trifft. Dreht sich E um einen festen auf ihr liegenden Punkt m, so ist der Ort von p das reciproke ebene System $N[p]$. Der Schein $a[p]$ desselben in a ist ein zu $m[E]$ reciprokes Bündel und schreibt für e als geometrischen Ort eine Oberfläche zweiter Ordnung f^2 vor. etc. etc.

Zu der Trägerebene $(a\varphi) \equiv \mathfrak{A}$ des Kegelschnittes r^2 gehört in Σ' der Schnitt $\mathfrak{m}'$ von γ und A, um den sich alle jene Geraden $\beta' \equiv [A, E]$ drehen, welche den Strahlen α von $\mathfrak{A}$ entsprechen. $\mathfrak{A}$ bleibt somit so lange fest, als γ durch $\mathfrak{m}'$ geht; sie trägt alle r^2, welche durch das Nullsystem diesen γ-Linien zugewiesen erscheinen.

Coincidirt γ insbesondere mit $\overline{a\mathfrak{m}'} \equiv \alpha'$, so wird der Schnitt von $\mathfrak{A}$ mit $\alpha'[E]$ mit dem Scheine $a[\alpha]$ concentrisch, und das Erzeugniss r^2 besteht aus den Doppelstrahlen ε_1, ε_2 dieser Strahlbüschel. ε_1, ε_2 sind für die Nullflächen f^2 aller Bündel, deren Mittelpunkte m auf α' liegen, Erzeugende; daher $\mathfrak{A}$ für alle diese f^2 die Tangentialebene in a. Liegt die Aufgabe vor, zu einer gegebenen Fläche f^2 den Mittelpunkt m des zugeordneten Bündels zu bestimmen, so wird man zuerst in a an f^2 die Berührungsebene $\mathfrak{A}$ legen und ihren Schnitt δ mit A zeichnen, hierauf zu diesem den entsprechenden Punkt $\mathfrak{m}'$ in σ' ermitteln und $\mathfrak{m}'$ mit a verbinden. Der zweite Schnitt von $\overline{a\mathfrak{m}'}$ mit f^2 ist dann der gesuchte Punkt.

Die Doppelstrahlen ε_1, ε_2 treffen c^2 in zwei Punkten c_1, c_2, welche mit $\mathfrak{m}'$ jene zwei Linien τ'_1, τ'_2 bestimmen, die ihnen in σ' entsprechen, und mit $\mathfrak{m}'$ und a diejenigen zwei Ebenen L_1 und L_2, welche ihnen in Σ' coordinirt sind. τ'_1, τ'_2 sind Tangenten von T_2; L_1, L_2 Tangentialebenen von C_2 und ε_1, ε_2 ihre Nullgeraden. Die zwischen K^2 und C_2 bestehende Projectivität [Art. 14] erkennen wir nun auch als durch $\sigma\sigma'$ vermittelt. etc.

27. Transformirt man den Raum durch eine Collineation, welche ihr Centrum in a, und A zur Collineationsebene hat, so erscheint ein jeder Punkt e in einem Strahl α aus a, etwa bis nach e', verschoben; und seine Nullebene E wird in eine andere Ebene E' übergeführt, welche in A dieselbe Trace β' wie E besitzt und überdies e' enthält, also mit der Nullebene dieses Punktes identisch ist.

So geht auch jedes andere Paar e_n, E_n über in einen Punkt e'_n und seine Nullebene, und es sind die Transformirten von je zwei Gebilden, die im Nullsystem zusammengehören, wieder einander entsprechende Nullgebilde. Es bleibt demnach auch das Nullsystem, als Ganzes, durch die Collineation unverändert.

„*Durch jede räumliche Collineation, welche a zum Centrum und A zur Collineationsebene hat, wird das Nullsystem in sich selbst übergeführt.*“

Ausgezeichnet unter diesen Centralprojectionen ist jene, mit dem charakteristischen Doppelverhältnisswerth $(aeee') = -1$, die involutorische, welche zeigt, *dass der Hauptpunkt auch die Rolle des Pols, und die Hauptebene jene der zugehörigen harmonischen Polare für das Nullsystem spielt.*

28. Rückt a oder A ins Unendliche, so specialisirt sich der letzte Satz in der folgenden, bemerkenswerthen Weise:

„Befindet sich der Hauptpunkt im Unendlichen, so bleibt das Nullsystem dann unverändert, wenn man, unter Beibehaltung von A, jeden Punkt e in der Richtung der Hauptstrahlen um eine Strecke fortschiebt, welche seiner Entfernung von A direct proportionirt ist, und gleichzeitig E um die Bildtrace mitdreht.“

„Ist die unendlich ferne Ebene die Hauptebene des Nullsystems, so ändert sich dasselbe dann nicht, wenn man alle Ebenen E parallel verschiebt und ihre Nullpunkte e auf den Hauptstrahlen α so fortgleiten lässt, dass die Verbindungslinie von irgend zwei Punkten in der neuen Lage zu jener in der ursprünglichen parallel bleibt.“

Wenn im letzteren Falle der imaginäre Kugelkreis die singuläre Curve c^2 ist, so ist das *Nullsystem ein sphärisches und cyklisches, indem alle Nullflächen zweiter Ordnung Kugeln, und alle Nullcurven zweiter Ordnung Kreise sind. Ein solches System ist vollkommen bestimmt durch den Hauptpunkt a, zwei durch denselben gelegte Kreise r_1^2 und r_2^2 und zwei diesen Curven zuzu-*

ordnende einpunktige Secanten γ_1, γ_2. Die Nullkugel f^2 eines Bündels $m[E]$ erscheint festgelegt durch a, m und die zwei nicht auf γ_1, resp. γ_2 befindlichen Schnittpunkte e_1 und e_2 von $(m\gamma_1) \equiv E_1$ mit r_1^2 und $(m\gamma_2) \equiv E_2$ mit r_2^2. Ebenso leicht ist auch die Nullebene von m anzugeben. Sie berührt die Kugel f^2 in dem Punkte m. etc. etc.

§ 5.

Das Leitstrahlensystem und die Ordnungsstrahlencomplexe des quadratischen Nullsystems.

29. Die Artikel 22 und 23 lehren, dass die Ebene $\mathfrak{A}$, welche von den Nullpunkten eines Ebenenbündels $\mathfrak{m}'[E]$ erfüllt wird, in dem Falle, wo $\mathfrak{m}'$ auf c^2, etwa nach c, verlegt wird, diesen Punkt enthält und in eine Tangentialebene L von C_2 übergeht. Daraus ist klar, dass der Nullpunkt e_x einer Ebene E_x von $c[E]$ sich irgendwo auf der Schnittlinie λ von E_x und L befindet, und dass er auf dieser Geraden so lange bleibt, als E_x sich um dieselbe dreht: λ entspricht sich selbst, sie und jede andere Gerade, welche durch einen Punkt c von c^2 läuft und in derjenigen Ebene L liegt, die diesem Punkte in Σ zugeordnet ist, ist ein Leitstrahl des Nullsystems.

„*Das Leitstrahlensystem des quadratischen Nullsystems ist von der zweiten Ordnung und Klasse. Es hat c^2 zur singulären Curve und den singulären Kegel C_2 zur Brennfläche.*“

Legt man aus einem beliebigen Punkte e die Tangentialebenen L_1, L_2 an C_2 und verbindet man e mit denjenigen zwei Schnittpunkten c_1 und c_2 von c^2 und L_1, L_2, welche diesen Ebenen in Σ' entsprechen; so erhält man die zwei durch e laufenden Leitstrahlen. Ihre Verbindungsebene ist die Nullebene E von e.

Bringt man eine beliebige Ebene E mit c^2 in c_1 und c_2 zum Schnitt, legt man ferner aus diesen Punkten diejenigen Berührungsebenen L_1, L_2 an C_2, welche ihnen in Σ coordinirt sind; so gewinnt man in den Schnittlinien von E mit L_1 und L_2 die zwei in E verlaufenden Leitstrahlen λ_1 und λ_2. Ihr Schnittpunkt e ist der Nullpunkt von E.

30. Durch einen Punkt c geht nur ein Leitstrahl λ_1, der einer vorgelegten Geraden γ begegnet; er verbindet c mit dem Punkte e, in welchem γ von der c zugeordneten Ebene L geschnitten wird. Umgekehrt sind aber durch e zwei λ, λ_1 und λ_2, fixirt; es ist daher die Verwandtschaft zwischen den Punktsystemen $\gamma(e)$, $c^2(c)$ eine ein-zweideutige, und folglich die von den sprachlichen λ erfüllte Regelschaar λ^4 von der vierten Ordnung. Ihr ist c^2

auf- und C_2 umschrieben; sie besitzt ferner in dem Nullkegel R_2 von γ ihren Doppelkegel, und in der Nullcurve r^2 von γ ihren Doppelkegelschnitt. Der erstere wird ja von den Ebenen $(\lambda_1\lambda_2)$, den Nullebenen der Punkte von γ, eingehüllt, und der letztere von dem Nullpunkte e_x einer um γ rotirenden Ebene E_x erzeugt, da sich in e_x die in E_x befindlichen λ-Strahlen λ_1 und λ_1' durchschneiden. Diese treffen γ in jenen zwei Punkten e, e', welche in der durch λ^4 auf γ und r^2 inducirten zwei-zweideutigen Beziehung zu e_x gewiesen sind.

Ordnen wir e und e' einander zu, so erhalten wir auf γ eine allgemeine zwei-zweideutige Punktreihe, und betrachten wir $(\gamma\lambda_1) \equiv E_1$ und $(\gamma\lambda_2) \equiv E_2$ als zusammengehörig, so ist dadurch ein ebensolches Büschel um γ definirt. An späterer Stelle zeigen wir, wann diese Gebilde in quadratische Involutionen übergehen.

„Die Leitstrahlen, welche eine beliebige Gerade schneiden, bilden eine Regelschaar vierten Grades, welcher die Nullcurve und der Nullkegel der Geraden doppelt umschrieben sind."

31. Hat γ mit c^2 einen Punkt c gemein, für welchen Fall sie mit ω bezeichnet werden soll, so degenerirt λ^4 in das Strahlbüschel (cL) und eine Regelschaar dritten Grades λ^3. Die einfache Leitlinie Ω von λ^3 ist Axe eines Ebenenbüschels, das der Reihe $\omega(e)$ als Nullgebilde entspricht. Wir nennen ω Ordnungslinie, Ω die gepaarte Ordnungsaxe, und beide ein ***Paar Ordnungsstrahlen*** des Nullsystemes.

„Eine Ordnungslinie ist die doppelte, und die ihr gepaarte Ordnungsaxe die einfache Leitlinie einer aus Leitstrahlen bestehenden Regelschaar dritten Grades."

Geht ω selbst in einen Leitstrahl λ über, so fällt mit diesem auch die zugehörige Ordnungsaxe Ω zusammen, und λ^3 wird zur *Cayley*schen Fläche (λ^3). Sie hat λ zur doppelten und einfachen Leitlinie und bezieht durch ihre Regelschaar die Punkte e von λ projectivisch auf die Punktreihe $c^2(c)$; sie ist ferner für das allgemeine Nullsystem die einfachste aus Leitstrahlen dargestellte Fläche.

„Alle Leitstrahlen, welche einen solchen Strahl treffen, liegen auf einer *Cayley*schen Fläche dritten Grades."

32. Als Besonderheit unter den Leitstrahlenflächen gilt offenbar jede durch einen Hauptstrahl α bestimmte. Sie besteht aus den zwei Strahlbüscheln, welche die Tangentialebenen L_1, L_2 aus α an C_2 und die diesen

coordinirten Punkte c_1, c_2 zu Trägern haben. Unter allen diesen Strahlbüscheln sind wieder zwei besonders ausgezeichnet. Ihre Scheitel sind die Berührungspunkte u_1, u_2 der zwei Kegelschnitte c^2 und T_2, und ihre Trägerebenen tangiren C_2 und K_2 längs $\overline{au_1}$ und $\overline{au_2}$. Diese Ebenen seien mit U_1 und U_2 benannt, ihre Schnittlinie mit Δ, und der Schnittpunkt dieser Linie mit A mit o bezeichnet.

33. Es lässt sich nachweisen, *dass o das Centrum und (au_1u_2) die Involutionsebene eines involutorischen Systems ist, in welchem das Nullsystem sich selbst entspricht.*

Da (au_1u_2) und o homologe Elemente von Σ und Σ' sind, so ist jeder in (au_1u_2) verlaufenden Hauptlinie $\overline{\alpha}$ eine von o ausgehende Axe $\overline{\beta}'$ gepaart, und die sämmtlichen λ, welche $\overline{\alpha}$ zur Secante haben, vertheilen sich in zwei Büschel $c'(\lambda')$, $c''(\lambda'')$, deren Scheitel sich mit o in gerader Linie $\overline{\beta}'$ befinden. Daraus erhellt, dass die Leitstrahlen λ', λ'', welche ein Punkt $\overline{e}$ von $\overline{\alpha}$ festlegt, erstens mit o in einer Ebene $\overline{E}$ liegen, zweitens mit $\overline{ao}$ und mit der Schnittlinie von $\overline{E}$ und (au_1u_2) einen harmonischen Vierstrahl gestalten.

In dieser Art ordnen sich die sämmtlichen Elemente des Leitstrahlensystems in Paare der sprachlichen Involution: Man wird zu einem zweiten Leitstrahl λ_1', etwa jenem, der λ' in einem gegebenen Punkte e' trifft, den harmonischen erhalten, indem man e' aus o auf λ'' nach e'' projicirt und e'' mit dem Spurpunkte $\overline{e}_1$ von λ_1' in (au_1u_2) verbindet. Diese Construction zeigt, dass $(\lambda'\lambda_1')$ — die Nullebene E' von e' — von $(\lambda''\lambda_1'')$ — der Nullebene E'' von e'' — durch (au_1u_2) und o harmonisch getrennt wird, dass also in der That durch die sprachliche Projection Elemente, und folglich auch Gebilde, die durch das Nullsystem verbunden erscheinen, wieder in solche transformirt werden.

34. Aus der Verknüpfung dieses Resultates mit jenem des 27. Art. gewinnen wir das folgende Ergebniss:

> „*Die Elementenpaare eE des quadratischen Nullsystems ordnen sich in Doppelpaare $e'E'$, $e''E''$ einer geschaarten Involution.* Die eine der zwei Involutionsaxen verbindet die Contactpunkte u_1, u_2 zwischen c^2 und C_2, die andere ist der Schnitt der zwei C_2 in u_1 und u_2 tangirenden Ebenen U_1, U_2."

Die Wichtigkeit des Satzes veranlasst uns, ihn näher zu beleuchten.

Zu dem Zwecke construiren wir auf $\bar{\alpha}$ den zu $\bar{e}$ harmonischen Punkt (e) für a und den Schnitt $\mathfrak{e}$ von $\bar{\alpha}$ mit A als Fundamentalpunkte, ferner ziehen wir die Leitstrahlen λ''', λ'''', die ihn mit c' und c'' verbinden, endlich projiciren wir e' und e'' aus a auf λ''', bezw. λ''''. Die Bilder e''' und e'''' formiren ein Viereck mit den Diagonalpunkten a, o und einem dritten y auf $\overline{u_1 u_2}$, und das in y zusammenstossende Seitenpaar bestimmt auf Δ zwei Punkte z' und z'', welche so liegen, dass

$$(a o z' z'') = (e' e'''' y z') = (e'' e''' y z'') = -1$$

ist.

Wir ergänzen ebenso λ_1' zu dem Vierseit $\lambda_1' \lambda_1'' \lambda_1''' \lambda_1''''$. Dann sind erstens $(\lambda' \lambda_1') \equiv E'$, $(\lambda'' \lambda_1'') \equiv E''$, $(\lambda''' \lambda_1''') \equiv E'''$ und $(\lambda'''' \lambda_1'''') \equiv E''''$ die Nullebenen von e', e'', e''' und e'''', und (wie die Figur lehrt) Seitenflächen eines Vierflachs mit den Diagonalebenen A, $(a u_1 u_2)$ und $(a o \mathfrak{r})$, wobei $\mathfrak{r}$ den auf $\overline{u_1 u_2}$ befindlichen Scheitel des Vierflachs bezeichnet; zweitens ist $\overline{\mathfrak{r} z'}$ die Schnittlinie von E' und E'''' und $\mathfrak{r} z''$ jene von E'' und E'''; drittens bestehen die Relationen $[E', E'''', (\mathfrak{r}\Delta), (z'\delta)] = [E'', E''', (\mathfrak{r}\Delta), (z''\delta)] = -1$, – durch welche der Satz begründet erscheint.

35. Zu den Ordnungsstrahlen, die wir nun eingehender besprechen, führt auch die Betrachtung der Kernflächen ω^2 und Ω_2 einer der ∞^4 vielen Correlationen $\Sigma\Sigma'$, welche wir zur Erzeugung des Nullsystems verwendet haben.

Sind ω und Ω zwei durch $\Sigma\Sigma'$ auf einander bezogene Erzeugende von ω^2 und Ω_2, so erhalten wir zu jeder durch Ω geführten Ebene E den ihr in Σ zugewiesenen Punkt p, indem wir sie einfach mit ω zum Schnitt bringen. Mit diesem Schnitte p fällt allemal seine Projection e aus a auf E zusammen; er ist in Folge dessen stets auch als Nullpunkt der Ebene E beigeordnet. Damit ist gezeigt, dass erstens die Linien ω und Ω; zweitens je zwei durch $\Sigma\Sigma'$ verbundene Erzeugende von ω^2 und Ω_2; drittens ***irgend zwei zusammengehörige Kernflächen $\omega^2_{(n)}$ und $\Omega_2^{(n)}$ in dem Nullsystem ganz ebenso auf einander bezogen sind, wie in der räumlichen linearen Correlation $\Sigma\Sigma'_{(n)}$, zu der sie als Kerngebilde gehören.***

Da alle ω^2 den singulären Kegelschnitt c^2 enthalten, und alle Ω_2 dem singulären Kegel C_2 umschrieben sind, weil ferner die Mannigfaltigkeit der Paare ω^2, Ω_2 ebenso gross ist, wie jene der reciproken Systeme $\Sigma\Sigma'$; so ist jeder Strahl des Complexes, der alle Punkte von c^2 zu Hauptpunkten

hat, eine Ordnungslinie, und sind alle C_2 tangirenden Geraden Ordnungsaxen. Wir fassen dieses bemerkenswerthe Resultat, das mit dem 31. Art. im Einklang steht, folgendermassen in einen Satz:

„*Ausser den Hauptlinien giebt es noch unendlich viele gerade Punktreihen, welchen im quadratischen Nullsystem Ebenenbüschel erster Ordnung entsprechen. Die Träger der Reihen und die Axen der Büschel bilden je einen singulären Complex zweiten Grades; für den ersteren ist nämlich jeder Punkt von c^2 ein Hauptpunkt, und für den letzteren jede Tangentialebene von C_2 eine Hauptebene. Beide Complexe haben das Leitstrahlsystem entsprechend gemein und sind durch das Nullsystem eindeutig auf einander bezogen.*“

36. Zwei coordinirte Kernflächen durchschneiden sich in einem Leitstrahlenvierseit $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_1' \lambda_2'$; und umgekehrt hat die Congruenz, welche durch irgend zwei sich kreuzende Leitstrahlen λ_1, λ_1' bestimmt ist, mit den Ordnungsstrahlencomplexen die Regelschaaren zweier zusammengehörigen Kernflächen ω^2, Ω_2 gemein. Hieraus folgt, *dass jede Transversale zweier Paare $\omega \Omega$, $\omega' \Omega'$ von Ordnungsstrahlen ein Leitstrahl ist*, ferner — was übrigens selbstverständlich ist —, dass jeder Leitstrahl, der eine Ordnungslinie schneidet, auch die gepaarte Ordnungsaxe trifft.

Gestützt auf diese Beziehungen, kann man das Nullsystem construiren, wenn der Hauptpunkt a oder die Hauptebene A gegeben ist, und ferner entweder

1) drei Paare von Ordnungsstrahlen $\omega \Omega$, $\omega' \Omega'$, $\omega'' \Omega''$, welche zwei Transversalen λ_1, λ_1' besitzen, vorliegen, oder

2) ein Vierseit von Leitstrahlen $\lambda_1 \lambda_1' \lambda_2 \lambda_2'$ und zwei Transversalen ω, Ω zweier Gegenseiten λ_2, λ_2' desselben als Ordnungsstrahlenpaar angenommen werden.

Im ersten Fall bestimmen $\omega \omega' \omega''$ eine Fläche ω^2, und $\Omega \Omega' \Omega''$ eine Fläche Ω_2, die ω^2 in λ_1, λ_1' und folglich noch in zwei Erzeugenden λ_2, λ_2' der andern Schaar schneidet; im zweiten Fall ist ω^2 durch $\lambda_1 \lambda_1' \omega$, und Ω_2 durch $\lambda_1 \lambda_1' \Omega$ gegeben, und ist $\lambda_2 \lambda_2'$ beiden gemein. Man darf somit beidemal ω^2 und Ω_2 als Kernflächen einer linearen Correlation $\Sigma \Sigma'$ ansehen, und hat, um das Nullsystem vervollständigen zu können, wenn a gegeben ist, nur noch A, und wenn A vorliegt, noch a zu ermitteln, was keiner Schwierigkeit unterliegt, da a und A einander als Elemente von Σ, bezw. Σ' entsprechen.

§ 6.

Der tetraedrale Complex der Involutionsstrahlen des Leitstrahlensystems.

37. Wir kehren zu der im 30. Art. besprochenen Regelschaar λ^4 zurück. Die zwei Leitstrahlen λ_1, λ'_1, welche von einem Punkte e_x der Nullcurve r^2 ausgehen, erhalten wir, da γ vorliegt, am einfachsten dadurch, dass wir durch $\overline{ae_x}$ die Tangentialebenen L_1, L'_1 an C_2 führen, sie mit γ in e_1 und e'_1 zum Schnitt bringen und e_1 und e'_1 mit e_x verbinden. Will man auch noch die zweiten von e_1 und e'_1 ausgehenden Strahlen λ_2 und λ'_2 kennen, so kann man analog vorgehen. Weitere Punkte $e_{\prime\prime}$ resp. $e'_{\prime\prime}$ von λ_2, bezw. λ'_2, sind nämlich die von a verschiedenen Treffpunkte zwischen r^2 und den zweiten Berührungsebenen $L_{\prime\prime}$, $L'_{\prime\prime}$ aus $\overline{ae_1}$ und $\overline{ae'_1}$ an C_2.

Aus dieser Construction ist ersichtlich, dass in dem Falle, wo $e'_{\prime\prime}$ mit $e_{\prime\prime}$ einmal coincidirt, die Ebene $(a\gamma)$ zur Trägerebene $\mathfrak{A}$ von r^2 rücksichtlich C_2 polar conjugirt ist und $e'_{\prime\prime}$ für jede Lage von e_x mit $e_{\prime\prime}$ zusammenfällt *). Dann ist aber sowohl die gerade Reihe $\gamma(e_1 e'_1)$ als auch die krumme $r^2(e_x e_{\prime\prime})$ eine quadratische Involution, d. h. das Leitstrahlensystem liefert nun mit γ einen involutorischen Schnitt und einen involutorischen Schein, nämlich das Büschel, welches γ mit der Reihe $r^2(e_x e_{\prime\prime})$ bestimmt.

38. Handelt es sich um die genauere Untersuchung des von diesen „Involutionsstrahlen" J formirten Systems, so kann man jede der zwei Definitionen zum Ausgangspunkte wählen; also entweder nach den Diagonalen $\overline{e_1 e'_1} \equiv J$ der Leitstrahlenvierseite $\lambda_1 \lambda'_1 \lambda_2 \lambda'_2$, oder nach jenen Geraden J fragen, welche bezüglich C_2 zu der Ebene $\mathfrak{A}$ ihrer Nullcurve polar liegen.

Wir betreten den zweiten Weg, führen durch a eine Ebene $\mathfrak{A}$, construiren ihre Polare π hinsichtlich C_2 und auch den ihr in Σ' zugeordneten Punkt $\mathfrak{m}'$ in A. Zu jeder Linie γ aus $\mathfrak{m}'$ gehört eine in $\mathfrak{A}$ verlaufende Nullcurve r^2, insbesondere also auch zu jedem Strahl J des Büschels $\mathfrak{m}'(J)$, welches die zu $\mathfrak{A}$ conjugirte Ebene $(\mathfrak{m}'\pi)$ zum Träger hat. Daraus ist klar, dass ein beliebiger Punkt $\mathfrak{m}'$ von A Scheitel eines aus J-Strahlen bestehenden Strahlbüschels, und die Trägerebene $(\mathfrak{m}'\pi) \equiv \mathfrak{E}$ allemal ein Element des Bündels um a ist.

Für das Weitere ist es bequemer, statt der Ebenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ und der

*) Die zahlreichen harmonischen Eigenschaften, welche die Fläche λ^4 in diesem besonderen Falle erhält, haben wir in einer im 81. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie befindlichen Abhandlung mitgetheilt [pag. 615—647].

Strahlen π ihre Spuren δ, ϱ'' und $\mathfrak{p}''$ in A zu betrachten. Zu $\mathfrak{m}'$ findet man dann das zugehörige ϱ'', indem man $\mathfrak{m}'$ zu σ' [s. Art. 22] rechnet, die reciproke Linie δ in σ aufsucht und ihren Pol $\mathfrak{p}''$ in Bezug auf τ_2 nimmt; ϱ'' ist die Verbindungslinie von $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{m}'$. Da $\sigma'[\mathfrak{m}']$ und $\sigma[\delta]$ reciproke Systeme sind und $\sigma(\delta)$ und $\sigma''(\mathfrak{p}'')$ ein Polarsystem bilden, so sind $\sigma'(\mathfrak{m}')$ und $\sigma''(\mathfrak{p}'')$ collineare Felder.

Bewegt sich $\mathfrak{p}''$ auf einer Geraden ϱ''_x, so rotirt seine Polare δ um den Pol $\mathfrak{e}_x$ von ϱ''_x, und es beschreibt sonach $\mathfrak{m}'$ die zu $\mathfrak{e}_x$ in σ' coordinirte Gerade β'_x. Diese trifft ϱ''_x in einem einzigen Punkte $\mathfrak{m}'_x$: die Beziehung zwischen ϱ''_x und $\mathfrak{m}'_x$ ist daher eine projectivische, und die von diesen Gebilden erzeugten Felder stehen in der Correlation eines eindeutigen Nullsystems. Dreht sich nun ϱ''_x um einen seiner Punkte $(\mathfrak{p}'')$, so rückt $\mathfrak{e}_x$ auf der Polare (δ) fort, β'_x dreht sich um $(\mathfrak{m}')$ und $\mathfrak{m}'_x$ beschreibt infolge dessen einen durch $(\mathfrak{p}'')$ und $(\mathfrak{m}')$ gehenden Kegelschnitt $\mathfrak{k}^2$, das Erzeugniss der projectivischen Büschel $(\mathfrak{p}'')[\varrho''_x]$ und $(\mathfrak{m}')[\beta'_x]$. Kommt ϱ''_x in die Lage $\overline{(\mathfrak{p}'')o}$, so fällt $\mathfrak{e}_x$ in den Schnitt von (δ) und $\overline{u_1 u_2}$, daher β'_x in die Linie $\overline{(\mathfrak{m}')o}$ und $\mathfrak{m}'_x$ selbst nach o. Zielt ϱ''_x nach u_1, so befindet sich $\mathfrak{e}_x$ auf $\overline{u_1 o}$, und es wird β'_x identisch mit $\overline{(\mathfrak{m}')u_1}$, und $\mathfrak{m}'_x$ mit u_1: o, u_1, u_2 liegen also stets auf $\mathfrak{k}^2$, d. h. „Das Nullsystem $[\mathfrak{m}'_x, \varrho''_x]$ ist quadratisch und hat o, u_1, u_2 zu Fundamentalpunkten.“ In einem solchen Nullsystem ist das Doppelverhältniss $(1\,2\,3\,\mathfrak{m}'_x)$, welches die Schnittpunkte 1, 2, 3 von ϱ''_x und $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{o u_1}$, $\overline{o u_2}$ mit $\mathfrak{m}'_x$ bestimmen, eine Constante N*). Da nun zu $1\,2\,3\,\mathfrak{m}'_x$ die Reihe $\mathrm{I\,II\,III}\,\mathfrak{m}'_x$, in der ein beliebiges in $\mathfrak{E} \equiv (a\varrho''_x)$ durch $\mathfrak{m}''_x$ gezogener Strahl J die Seitenflächen des Tetraeders $a u_1 u_2 o$ trifft, für a als Centrum perspectivisch liegt, so ist auch $(\mathrm{I\,II\,III}\,\mathfrak{m}'_x) = N$, und folglich die Gesammtheit aller J-Strahlen ein Complex zweiten Grades mit dem Fundamentaltetraeder $a u_1 u_2 o$.

„Die Strahlen J, welche das Leitstrahlensystem sowohl in Punkten einer quadratischen Involution schneiden als auch durch Ebenen einer solchen Involution projiciren, erfüllen einen tetraedralen Complex, dessen Fundamentaltetraeder den Hauptpunkt a, das Centrum o und die Berührungspunkte u_1, u_2 von c_2 mit C_2 zu Ecken hat.“

39. Dieses Ergebniss kann man auch gewinnen, indem man aus der Ebene A in den Raum aufsteigt. Sobald ϱ''_x sich um $(\mathfrak{p}'')$ dreht, beschreibt $\mathfrak{E}$

*) Siehe: „Ueber ein Nullsystem zweiten Grades“. Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 83, Abth. II, pag. 385.

das Büschel mit der Axe $\overline{a(\mathfrak{p}'')}$, und das Involutionsstrahlenbüschel $\mathfrak{m}'_x(J)$ die durch $\mathfrak{f}^2$ und $\overline{a(\mathfrak{p}'')}$ bestimmte Congruenz erster Ordnung, zweiter Klasse. Diese löst sich in unendlich viele Complexkegel zweiter Ordnung auf, die alle $\mathfrak{f}^2$ zur Basis und ihren Scheitel auf $\overline{a(\mathfrak{p}'')}$ haben. etc.

Erwägt man, dass diese Beziehungen bei jedem tetraedralen Complex zutreffen, so wird man auch die Richtigkeit des folgenden Zusammenhanges zwischen einem solchen und einem ebenen Nullsystem zweiten Grades einsehen:

a) „Wenn man ausserhalb der Ebene A eines quadratischen Nullsystems Σ^2 einen festen Punkt a beliebig wählt, ferner durch ihn eine Ebene $\mathfrak{E}$ legt, in dieser alle Strahlen J zieht, welche nach dem Nullpunkte $\mathfrak{m}'$ ihrer Schnittlinie ϱ'' mit A zielen, und hierauf $\mathfrak{E}$ alle möglichen Lagen annehmen lässt: dann erfüllen die Strahlen J einen allgemeinen Complex zweiten Grades, der a und die Fundamentalpunkte des ebenen Nullsystems zu Hauptpunkten hat."

b) „In einer jeden Hauptebene A eines tetraedralen Complexes stehen die Scheitel der Strahlenbüschel erster Ordnung mit den Tracen der zugehörigen Trägerebenen in der Correlation eines quadratischen Nullsystems."

40. Nun noch Einiges über das Verhältniss des J-Complexes zu den Systemen der Leit- und Ordnungsstrahlen.

Verlegt man in Art. 38 $\mathfrak{m}'$ auf c^2 nach c, so fällt $\mathfrak{A}$ in die entsprechende Tangentialebene L von C_2. Da für diese die Berührungserzeugende die Polare π vorstellt, so coincidirt auch $\mathfrak{E}$ mit L und folglich das in $\mathfrak{E}$ befindliche J-Strahlenbüschel mit dem in L liegenden Büschel von Leitstrahlen:

„Das Leitstrahlensystem ist als Bestandtheil im tetraedralen Involutionsstrahlencomplexe enthalten."

Die Seitenflächen von au_1u_2o werden sonach auch von jedem Leitstrahle in vier Punkten mit dem constanten Doppelverhältnisswerthe N geschnitten. Aus diesem Grunde nennen wir N *das charakteristische Doppelverhältniss,* und au_1u_2o das Fundamentaltetraeder des Nullsystems.

Ist au_1u_2o bekannt und ein Leitstrahl λ gegeben, so ist das Nullsystem völlig bestimmt; denn c^2 berührt $\overline{ou_1}$ in u_1, $\overline{ou_2}$ in u_2 und enthält den Schnitt c von λ mit (ou_1u_2), und C_2 berührt (aou_1) längs $\overline{au_1}$, (aou_2)

längs $\overline{au_2}$ und hat $(a\lambda)$ zur Tangentialebene, — es sind also beide singuläre Gebilde, und durch sie das Nullsystem eindeutig gegeben.

„*Das quadratische Nullsystem ist durch einen Leitstrahl und das Fundamentaltetraeder völlig bestimmt*, wenn angegeben ist, welche Ecke des Tetraeders als Hauptpunkt *a*, und welche als Centrum *o* zu betrachten ist.“

Was den Zusammenhang der Ordnungsstrahlencomplexe mit dem *J*-Complexe anbelangt, so giebt darüber der 31. Art. Aufschluss. Derselbe lehrt, dass die auf den Schnitt bezügliche Eigenschaft der *J*-Strahlen auch allen Ordnungsaxen Ω zukommt, und jene, welche sich auf die Projection bezieht, noch den Ordnungslinien.

41. Zu allen diesen Resultaten gelangt man auch, wenn man den ersten Weg einschlägt und die *J*-Strahlen als Diagonalen der Leitstrahlenvierseite betrachtet. Wenige Andeutungen sollen genügen.

Ein Punkt *e* veranlasst durch die zwei in ihm zusammentreffenden Leitstrahlen λ_1, λ_2 im Sinne des 31. Art. zwei *Cayley*sche Flächen (λ_1^3), (λ_2^3); es existiren folglich unendlich viele Leitstrahlenpaare λ_1', λ_2', welche $\lambda_1 \lambda_2$ zu einem Vierseit ergänzen. Ihr Schnitt e', die Gegenecke von *e*, beschreibt die Schnittcurve J^3 von (λ_1^3) mit (λ_2^3), die offenbar kubisch ist, da die Flächen ausser c^2 auch noch λ_1 und λ_2, und zwar beide doppelt gemein haben. Weil J^3 auch *e* enthält, so ist der Grad des Kegels, den die durch *e* laufenden Diagonalen *J* erfüllen, und also auch der Grad des von allen *J* formirten Complexes gleich zwei. Dass aou_1u_2 Hauptpunkte dieses Complexes sind, lässt sich durch Verlegung von *e* nach diesen Punkten leicht darthun. Hervorzuheben ist nur noch, dass die J^3 keine Ordnungscurven des Complexes sind, indem nicht jede Secante einer solchen ein *J*-Strahl ist, sondern nur jene, welche mit den Leitlinien der zwei *Cayley*schen Flächen einem Bündel angehören.

„Zwei *Cayley*sche Leitstrahlenflächen, deren Leitlinien einen Punkt *e* gemein haben, durchschneiden den Complexkegel, der *e* zum Scheitel hat, in derselben kubischen Curve.“

Unendlich viele von diesen Curven laufen durch einen beliebigen Punkt des Raumes, und ebenso viele haben einen Involutionsstrahl zur gemeinsamen Secante. Sie schneiden ihn in Punktepaaren derselben Involution, wie das Leitstrahlensystem. etc.

§ 7.

Ebene Schnitte und Projectionen.

42. Der Schnitt einer Ebene M mit ihrem Nullbündel F_2 und ihr Punktsystem stehen in der Beziehung eines projectivischen Nullsystems. Einem Punkte e in M ist nämlich die Spur η ihrer Nullebene E zugeordnet, und einer Geraden η von M der Nullpunkt e der zweiten, von M verschiedenen Tangentialebene E durch η an F_2. Gleitet e an einer in M liegenden Linie γ, so hüllt E einen F_2 umschriebenen Kegel zweiter Klasse R_2 ein, der A zur Tangentialebene hat, und folglich η eine Curve zweiter Klasse ρ_2, die dem Dreiseite β', λ_1, λ_2 eingeschrieben ist, das die zwei in M verlaufenden Leitstrahlen λ_1, λ_2 und die Trace β' von A gestalten. Rotirt η um einen Punkt m, dann erzeugt e eine Curve zweiter Ordnung s^2, die Schnittlinie von M mit der Nullfläche f^2 von m. Dieser Kegelschnitt geht infolge dessen stets durch den Nullpunkt (e) von M und die Schnittpunkte c_1 und c_2 von M und c^2, die Ecken des Dreiseits $\beta'\lambda_1\lambda_2$. Gehört M dem Bündel um a an, dann vertritt dieser Punkt die Stelle von (e). Damit ist bewiesen:

„*Jeder ebene Schnitt des räumlichen Nullsystems ist ein ebenes quadratisches Nullsystem. Die Hauptpunkte desselben sind der Nullpunkt der Trägerebene und ihre Schnitte mit dem singulären Kegelschnitte.*“

Dual wird das Nullsystem aus einem beliebigen Punkte m durch ein Nullsystem zweiten Grades im Bündel projicirt. Hauptaxen sind die beiden in m zusammentreffenden Leitstrahlen λ_1, λ_2 und der durch m fixirte Hauptstrahl $\overline{ma}$.

43. „Durch zwei $\begin{Bmatrix}\text{ebene}\\ \text{centrale}\end{Bmatrix}$ Nullsysteme lassen sich stets dann ∞^2 räumliche Nullsysteme zweiten Grades legen, wenn sich zwei ihrer Hauptlinien β'_1, β'_2 schneiden und in beiden der $\begin{Bmatrix}\text{Schnitt-}\\ \text{Verbindungs-}\end{Bmatrix}$ linie η_{12} der Träger $\begin{Bmatrix}M_1,\ M_2 \text{ derselbe Punkt } e_{12} \text{ als}\\ m_1,\ m_2 \text{ dieselbe Ebene } E_{12} \text{ als}\end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix}\text{Nullpunkt}\\ \text{Nullebene}\end{Bmatrix}$ entspricht.“

Um eines dieser Systeme völlig zu bestimmen, genügt es, einem nicht in M_1 oder M_2 befindlichen Punkte e eine durch ihn gelegte Ebene E zuzuordnen. Die zwei Kegelschnitte s_1^2 und s_2^2, welche zu dem Schnitte m_{12} von η_{12} und E in M_1 und M_2 gehören, treffen ausser in m_{12} auch noch in

dem Nullpunkte e_{12} von η_{12} zusammen. Sie legen im Verein mit e eine Fläche zweiter Ordnung f^2 fest, und diese weisen wir dem Bündel $m_{12}(E)$ als Nullfläche zu. Der Schnitt von f^2 mit der Ebene $(\beta'_1 \beta'_2) \equiv A$ ist der singuläre Kegelschnitt c^2, und der Schnitt r^2_{12} mit jener Ebene $\mathfrak{A}$, welche von e_{12} und den nicht auf β'_1 resp. β'_2 befindlichen Hauptpunkten (e_1) und (e_2) von M_1 und M_2 fixirt wird, die Nullcurve des Büschels mit der Axe η_{12}. Auf dieser Curve befindet sich auch der Hauptpunkt a des räumlichen Nullsystems. Um ihn zu erhalten, wähle man auf der Schnittgeraden η_1 von E und M_1 einen Punkt m_1 und construire seine Nullfläche f^2_1. Dieselbe enthält c^2, ferner den zu m_1 geordneten in M_1 verlaufenden Kegelschnitt ε^2_1 und den Punkt e; sie ist dadurch vollkommen bestimmt, und es lässt sich infolge dessen ihr von (e_1) und c^2 verschiedener Schnittpunkt mit r^2_{12} — der gesuchte Punkt a — leicht angeben.

44. *„Das quadratische Nullsystem setzt zwei beliebige Ebenen M_1, M_2 derart in Correlation, dass einem Strahle γ in der einen, etwa in M_1, zwei Punkte e', e'' in der andern zukommen, die einander in einer quadratischen Inversion entsprechen.* Der Fundamentalkegelschnitt J^2_2 der Inversion wird von den Nullpunkten derjenigen Ebenen D gebildet, welche die Nullfläche von M_2 längs ihrer Schnittcurve L^2_1 mit M_1 tangiren, und das Centrum der Inversion ist die Projection i_2 des Nullpunktes (e_1) von M_1 aus a auf M_2."

Ordnet man nämlich einem Strahl γ von M_1 jene Punkte e', e'' in M_2 zu, in welchen der Nullkegelschnitt r^2 von γ die Ebene trifft, so erscheinen e' und e'' involutorisch gepaart. Denn e' legt durch seine Nullebene E' in M_1 die Linie γ fest, und diese wieder in M_2 den Punkt e''; und umgekehrt. Weil ferner die r^2, welche den in M_1 verlaufenden γ entsprechen, alle durch den Nullpunkt (e_1) von M_1 und auch durch a gehen, so ist klar, dass die Linien $\overline{e'e''}$ das Strahlbüschel um den Schnittpunkt i_2 von $\overline{a(e_1)}$ mit M_2 als Scheitel formiren.

In dieser Correlation entspricht die Hauptlinie β'_1 von M_1 dem Inversions-Centrum i_2, da für die γ, welche durch einen Punkt $\mathfrak{m}'_1$ von β'_1 laufen, die r^2 alle in derselben Ebene $\mathfrak{A}$ liegen, und daher die e', e'' auf derselben Linie $\overline{e'e''} \equiv \iota_1$ bleiben. Das Entsprechen zwischen den ι und den $\mathfrak{m}'$ ist ein eindeutiges und die Beziehung zwischen der Reihe $\beta'(\mathfrak{m}')$ und dem Büschel $i_2(\iota)$ eine reciproke. Zu einem Polepaar e', e'' gehören zwei Nullebenen E', E'', die sich in einer Linie γ von M_1 durchschneiden; man kann

diese auch als ein Paar jener Tangentenebenen-Involution $F_2^2(E'E'')$ betrachten, welche die Nullfläche F_2^2 von M_2 zum Träger und M_1 zur Involutionsebene hat: und dann erscheinen die Punkte d von J_2^2 als die Nullpunkte der Doppelebenen D von $F_2^2(E'E'')$ definirt. Die D laufen sämmtlich durch den Pol p_1 von M_1 bezüglich F_2^2; man erhält demnach J_2^2 auch als Schnitt von M_2 mit der Nullfläche f_1^2 von p_1. Rücksichtlich J_2^2 ist die Hauptlinie β_2' von M_2 die Polare von i_2, da alle ihre Punkte zu i_2 invers sind.

Sich selbst invers ist jeder Kegelschnitt e^2 in M_2, dessen Punkte jenen γ entsprechen, die durch einen Punkt von M_1 laufen, ferner jeder Strahl aus i_2. Zugeordnet durch die Inversion sind sich auch der Schnitt $\mathfrak{S}_2$ von M_2 mit C_2 und die Projection $\mathfrak{B}^2$ von c^2 aus (e_1) auf M_2. Es wird dies klar, wenn man γ mit einer Ordnungsaxe Ω von M_1 zusammenfallen lässt; denn dann geht e' in den Schnitt von M_2 mit der gepaarten Ordnungslinie ω über und e'' in den Schnitt mit der zu (Ωa) gehörigen ε-Linie.

Bezieht man die Strahlen ι aus dem Centrum i_2 einer quadratischen Inversion in einer Ebene M_2 projectivisch auf die Punkte $\mathfrak{m}'$ einer Geraden β_1' einer zweiten Ebene M_1, und die Polepaare $e'e''$, welche auf ι liegen, eindeutig auf die Strahlen γ aus $\mathfrak{m}'$, so entsprechen sich e' und $(e'\gamma)$, e'' und $(e''\gamma)$ ... stets dann in einem quadratischen Nullsystem, wenn β_1' die Inversionsaxe β_2' [die Hauptaxe der Ebene M_2] schneidet.

§ 8.

Erste Anwendung.

45. Durch Angabe des Hauptpunktes a und des singulären Kegelschnittes c^2 sind dreifach unendlich viele Nullsysteme bestimmt. In allen kommt sämmtlichen Flächen f^2, welche a und c^2 enthalten, die Bedeutung von Nullflächen centraler Bündel $m(E)$ zu.

Sind f_1^2, f_2^2, f_3^2 drei solche Flächen, und m_1, m_2, m_3 die Mittelpunkte der ihnen in *einem* bestimmten Nullsystem Σ^2 coordinirten Bündel, so ist ersichtlich: dass *a*) der Nullpunkt e der Ebene $(m_1m_2m_3)$, welche den Bündeln gemeinsam ist, nothwendig f_1^2, f_2^2 und f_3^2 angehört, und folglich identisch mit dem zweiten Schnittpunkte dieser Flächen ist; *b*) die Schnittlinie r_{12}^2 von f_1^2 und f_2^2 die Nullcurve des Ebenenbüschels mit der Axe $\overline{m_1m_2}$ vorstellt, und infolge dessen $\overline{m_1m_2}$ in einem Punkte s_{12} schneidet; und *c*) in gleicher Weise $\overline{m_2m_3}$ die Schnittcurve r_{23}^2 von f_2^2 und f_3^2, und $\overline{m_3m_1}$ jene r_{31}^2 von f_3^2 und f_1^2 an je einer Stelle s_{23}, resp. s_{31} treffen.

Diese Beziehung lässt sich für je drei von n Flächen $f_1^2, f_2^2, \ldots f_n^2$ und die zugeordneten Punkte $m_1, m_2, \ldots m_n$ nachweisen. Man erhält in diesem Falle das folgende Theorem:

„Sind $f_1^2, f_2^2, \ldots f_n^2$ n durch einen festen Punkt a und einen festen Kegelschnitt c^2 willkürlich gelegte Flächen zweiten Grades, etwa n durch a laufende Kugeln, so giebt es stets dreifach unendlich viele vollständige räumliche n-Ecke, von denen jedes die Eigenschaft hat, dass erstens die Ecken $m_1, m_2, \ldots m_n$ auf den n Flächen liegen, zweitens die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Kanten jene $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Kegelschnitte, in welchen sich die Flächen zu zwei durchschneiden, einpunktig treffen, und drittens die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Seitenflächen durch die $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Punkte laufen, welche die Flächen zu drei festlegen."

46. Haben die n Flächen $f_1^2, f_2^2, \ldots f_n^2$ ausser c^2 und a noch einen Punkt e gemein, dann liegen die Punkte $m_1, m_2, \ldots m_n$ alle in der Nullebene E von e und das räumliche n-Eck wird zu einem ebenen. Das obige Theorem specialisirt sich wesentlich und kann, wenn man an Stelle der Flächen f^2 ihre Schnittcurven $\mathfrak{k}_1^2, \mathfrak{k}_2^2, \ldots \mathfrak{k}_n^2$ mit E setzt, wie folgt ausgesprochen werden:

„Sind $\mathfrak{k}_1^2, \mathfrak{k}_2^2, \ldots \mathfrak{k}_n^2$ n beliebige Kegelschnitte eines mit drei Grundpunkten e, c_1, c_2 versehenen Netzes, etwa n durch einen festen Punkt e in einer Ebene E verlaufende Kreise, so existiren allemal einfach unendlich viele vollständige n-Ecke, deren Ecken einzeln auf den n Curven liegen und deren Seiten einzeln durch die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Schnittpunkte von je zwei dieser Curven laufen."

Für den Fall der Kreise sind die n-Ecke unter einander ähnlich.

§ 9.

Zweite Anwendung: Die Abbildung der *Kummer*schen Fläche auf eine Fläche zweiten Grades.

47. Eine *Kummer*sche Fläche K^4 mit Doppelkegelschnitt c^2 und einem Knoten a lässt sich stets durch zwei projectivische Flächenbüschel zweiter Ordnung (f_1^2) und (f_2^2) erzeugen, deren Basiscurven die Linie c^2 zum gemeinsamen Bestandtheil haben. Die zweiten Theile der Basen stellen dann durch a laufende Kegelschnitte r_1^2 und r_2^2 einer und derselben Schaar

der Fläche K^4 vor, und die Schnitte ϱ^2 homologer Elemente der erzeugenden Büschel bilden die conjugirte Schaar.

Man betrachte a als Hauptpunkt und c^2 als singulären Kegelschnitt eines quadratischen Nullsystems und transformire vermittelst desselben die Curven r_1^2, r_2^2, ϱ_1^2, ϱ_2^2 ... und dadurch auch K^4 selbst. Den Kegelschnitten r_1^2 und r_2^2 entsprechen Axen γ_1 und γ_2, welche sie einpunktig in s_1 und s_2 schneiden, den Flächen f_1^2 und f_2^2 Bündel $m_1(E)$ und $m_2(E)$, deren Mittelpunkte auf γ_1, resp. γ_2 liegen, und ihrem Schnitte ϱ^2 entspricht die m_1 mit m_2 verbindende Axe g. (Vergl. Art. 20.) Da nun $(f_1^2) \overline{\wedge} (f_2^2)$ ist, so sind auch $\gamma_1(m_1)$ und $\gamma_2(m_2)$ projectivische Reihen, also das Bild der Curvenschaar (ϱ^2) eine Regelschaar (g) einer Fläche zweiten Grades H_2, deren Leitschaar offenbar in gleicher Weise die zu den (ϱ^2) conjugirten Kegelschnitte r^2 darstellt:

„Durch jedes Nullsystem zweiten Grades, das den Knoten a einer *Kummer*schen Fläche K^4 zum Hauptpunkt und ihre Doppelcurve c^2 zum singulären Kegelschnitt hat, erscheint dieselbe auf eine Fläche zweiter Klasse H_2 abgebildet, und zwar derart, dass ihren durch a laufenden conjugirten Kegelschnittschaaren die zwei Regelschaaren der H_2 entsprechen."

Die Ebenen $\mathfrak{A}$ der Kegelschnitte r^2 und ϱ^2 schneiden A in Linien δ, welche (nach Art. 22 u. f.) den Spuren $\mathfrak{m}'$ der Geraden γ und g in A reciprok entsprechen; sie umhüllen also einen Kegel zweiter Klasse D_2, da die $\mathfrak{m}'$ sich auf dem Schnitte Δ^2 von H_2 und A befinden.

48. Die sechs weiteren Kegelschnittschaaren $\mathfrak{r}^2$ von K^4 bilden sich als Kegel zweiter Klasse l^2 ab, die H_2 umschrieben sind und C_2 doppelt berühren (vergl. Art. 20). Die Scheitel μ der l^2 liegen auf den 6 Kanten S_1, S_{I}, S_2, S_{II}, S_3, S_{III} des von den vier gemeinschaftlichen Tangentialebenen L_1, L_2, L_3, L_4 von C_2 und H_2 gestalteten Vierflachs, und die Kegel selbst ordnen sich, im Einklang mit der Gruppirung der Kanten S zu drei Gegenkanten, in drei Paare von Schaaren. Hat man μ_1 auf S_1 angenommen, so ist dadurch der H_2 projicirende Kegel l_1^2 gegeben. Derselbe bestimmt mit C_2 eine Flächenschaar zweiter Klasse, in der nur eine Fläche F_2 enthalten ist, die A tangirt. Diese hat mit H_2 noch einen Kegel l_{I}^2 gemein, und der Mittelpunkt μ_{I} desselben liegt auf S_{I}. Dem Paare l_1^2, l_{I}^2 entsprechen im Nullsystem zwei gleichfalls gepaarte Kegelschnitte $\mathfrak{r}_1^2$, $\mathfrak{r}_{\text{I}}^2$ von K^4, die sich am einfachsten als Schnitte der Nullflächen f_1^2 und f_{I}^2 von μ_1 und μ_{I} mit der Ebene M ergeben, der F_2 als Nullfläche zugeordnet ist. — Unsere

Aufgabe wird es sein, vermittelst der Abbildung die Enveloppe der zu einem Kantenpaar S_1, S_I gehörigen M zu untersuchen.

Der von den M eingehüllte Kegel M^2 schneidet A in einer Curve N^2, die nach Art. 26 dem geometrischen Orte $\mathfrak{A}^2$ der Berührungspunkte $\mathfrak{a}$ von A mit den F_2 reciprok ist, folglich die Ordnungszahl von $\mathfrak{A}^2$ zur Klassenzahl hat. Um diese zu ermitteln, haben wir also nachzusehen, wie vielen Flächen F_2 eine Tangente τ' von T_2 als Erzeugende angehört. Aus τ' lassen sich zwei Tangentialebenen X_1, X_2 an H_2 legen; die Schnitte der ersten mit S_1 und S_I seien mit μ_1 und μ_I bezeichnet, sie gehören als Scheitel zu einem Kegelpaar l_1^2, l_I^2, das im Verein mit τ' *eine* Fläche F_2' fixirt; ebenso bestimmen jedoch auch die Treffpunkte μ_2, μ_{II} von X_2 mit S_1, S_I zwei conjugirte Kegel l_2^2 und l_{II}^2, welche ebenfalls *einer* F_2'' umschrieben sind, die τ' als Erzeugende enthält. Die zweiten in A verlaufenden Generatrices τ_1' und τ_2' erscheinen demnach zu τ' in einem auf T_2 liegenden symmetrischen Elementensystem zweiten Grades zugeordnet; es ist folglich die Curve $\mathfrak{A}^2$ als Directionscurve dieses Systems von der zweiten Ordnung — und M^2 von der zweiten Klasse. Damit ist das von ***Korndörfer*** in seiner Abhandlung: „Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung etc.“ (Math. Annalen Bd. 1) auf analytischem Wege gefundene Resultat, dass die Ebenen der sechs, einander zu zwei conjugirten Kegelschnittschaaren drei Kegel zweiter Klasse einhüllen, rein geometrisch nachgewiesen.

49. Auch die andern Eigenschaften der K^4, welche in der citirten Arbeit angeführt sind, lassen sich aus der Betrachtung dieser Fläche als Ort der Nullpunkte der Tangentialebenen von H_2 leicht entwickeln. So ist z. B. ohne weiteres klar, dass K^4 nicht mehr als zwölf gerade Linien der ganzen Ausdehnung nach enthält: die vier in a zusammentreffenden Nullgeraden ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 der Ebenen L_1, L_2, L_3, L_4 und die acht Ordnungslinien ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ... ω_8, welche zu jenen Ordnungsaxen Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, ... Ω_8 gepaart sind, in denen diese Ebenen die Fläche H_2 schneiden. — Aus der gegenseitigen Lage der Bilder auf H_2 kann man aber auch die Beziehungen auffinden, welche erstens zwischen den zwölf Geraden selbst, zweitens zwischen ihnen und den vier von den Kegelschnittsebenen eingehüllten Kegeln, und drittens zwischen diesen und den kubischen und biquadratischen Curven der K^4 bestehen.

Besonders einfach gestaltet sich die Abbildung bei Benutzung des im folgenden Paragraphen behandelten polaren Nullsystems.



§ 10.

Specielle Arten des quadratischen Nullsystems.

50. Als Eintheilungsgründe für die Nullsysteme zweiten Grades bieten sich von selbst dar:

1) die Realität des singulären Kegelschnittes c^2,

2) seine Beziehung zum singulären Kegel C_2, und

3) die Lage des Hauptpunktes a und der Hauptebene A.

Das erste Unterscheidungsmittel führt zu zwei Nullsystemen, welche sich mit gleicher Allgemeinheit gegenüberstehen: dem Systeme Σ_r mit reellen, und dem Systeme Σ_i mit imaginären Singularitäten c^2 und C_2. Während das erste ein reelles Leitstrahlensystem und reelle Ordnungsstrahlencomplexe besitzt, sind diese Gebilde für das zweite vollständig imaginär. In Σ_r entsprechen den ausserhalb C_2 gelegenen Punkten m und jenen Ebenen M, welche c^2 schneiden, hyperbolische Nullflächen, — den innerhalb dieses Kegels befindlichen m und den c^2 nicht treffenden M hingegen elliptische; in Σ_i kommen überhaupt nur Flächen f^2 und F_2 von der letzteren Art vor.

51. Ist c^2 ein Schnitt von C_2 oder umgekehrt C_2 ein Schein von c^2, so bilden die Systeme σ und σ' in A ein Polarsystem und Σ wird zum *polaren* Nullsystem Σ^p.

Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass in demselben die einfachsten Leitstrahlenflächen nicht wie beim allgemeinen Nullsystem von der dritten Ordnung, sondern quadratisch sind. Es stellen nämlich die Erzeugenden einer jeden Fläche λ^2, welche in c^2 von C_2 berührt wird, Leitstrahlen von Σ^p vor, und es entspricht auch deshalb einem beliebigen Punkte von λ^2 die zugehörige Berührungsebene dieser Fläche als Nullebene. Hieraus folgt:

> *„Durch die Flächen zweiter Ordnung, welche einen quadratischen Kegel C_2 längs eines ebenen Schnittes c^2 berühren, ist ein polares Nullsystem gegeben.“*

Zu einer Ebene E gewinnt man den Nullpunkt e als Berührungspunkt mit jener Fläche λ^2, welche sie als Tangentialebene eindeutig bestimmt, — und zu e die Nullebene E als Berührungsebene an die eine Fläche λ^2, welche durch e gelegt werden kann.

Legt man der Construction nicht das ganze Büschel (resp. die Schaar) (λ^2), sondern nur eine Fläche λ_1^2 zu Grunde, so erscheint dieselbe durch

ein Polarsystem bewerkstelligt. Man kann nämlich nun e als Projection des bezüglich λ_1^2 genommenen Pols e_1 von E aus a betrachten, und dann ist dual E bestimmt durch e und die reciproke Polare β' von $\overline{ae}$ bezogen auf λ_1^2. Hieraus ist ersichtlich, dass der Pol e_1 von E und die Polarebene E_1 von e sich in Σ^p entsprechen, d. h. dass jedes Paar e, E durch das Polarsystem in ein zweites e_1, E_1 transformirt wird:

> „*Jede quadratische Leitstrahlenfläche des polaren Nullsystems bestimmt als Ordnungsfläche ein Polarsystem, in welchem das Nullsystem sich selbst entspricht.*“

Diese Eigenschaft kommt natürlich auch den Systemen Σ_i^p zu, da die Flächen λ^2 ganz wohl reell sein können, selbst wenn das Leitstrahlensystem imaginär ist. Es sei hier, mehr als Beispiel, das sphärische polare Nullsystem erwähnt. In demselben ist c^2 identisch mit dem imaginären Kugelkreis, und es repräsentirt daher jede Kugel, deren Centrum a ist, eine Leitstrahlenfläche. Für eine Ebene E ist folglich der Fusspunkt e der Senkrechten aus a der Nullpunkt, und für ein beliebiges Gebilde sein Fusspunktgebilde für den Pol a das zugehörige Nullgebilde:

> „In der durch ein polares sphärisches Nullsystem hergestellten Transformation erscheint ein Gebilde in sein für den Hauptpunkt a als Pol construirtes Fusspunktgebilde übergeführt.“

Wien, im November 1883.

Der dritte *Gauss*sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, in vereinfachter Darstellung *).

(Von *Kronecker*.)

Bedeutet $\mathrm{R}(a)$ den Rest, welcher verbleibt, wenn von der reellen Grösse a die ihr ***nächste*** ganze Zahl subtrahirt wird, so ist die in üblicher Weise durch die Bedingung: $2a-1 < [2a] \leqq 2a$ definirte ganze Zahl $[2a]$ dem Doppelten der Zahl $[a]$ gleich oder um eine Einheit grösser, je nachdem $\mathrm{R}(a)$ positiv oder negativ ist. Demnach ist $\mathrm{sgn.\,R}(a) = (-1)^{[2a]}$, wenn mit $\mathrm{sgn.}A$ das Vorzeichen einer reellen Grösse A bezeichnet wird; da nun überdies, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $[2a]+[n-2a] = n-1$ ist, so wird:

$$\mathrm{sgn.\,R}(a) = (-1)^{[2a]} = (-1)^{[n-2a]},$$

falls n ***ungerade*** ist. Nimmt man hierin $a = n\alpha_0$, wo unter α_0 eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegende Grösse zu verstehen ist, und bezeichnet mit α die Grösse $2\alpha_0$ oder $1-2\alpha_0$, je nachdem $2\alpha_0$ unter oder über $\frac{1}{2}$ liegt, so ist auch α positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$, und es wird in ***jedem*** Falle:

$$\mathrm{sgn.\,R}(n\alpha_0) = (-1)^{[n\alpha]}.$$

Da aber $[n\alpha]$ die Anzahl der negativen Grössen: $\frac{1}{n}-\alpha,\ \frac{2}{n}-\alpha,\ \frac{3}{n}-\alpha, \dots$ angiebt, so ist auch:

$$\mathrm{sgn.\,R}(n\alpha_0) = \mathrm{sgn.}\prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{k}{n}-\alpha\right) \qquad \left({0<\alpha_0<\frac{1}{2},\ 0<\alpha<\frac{1}{2} \atop \alpha = 2\alpha_0 \text{ oder } 1-2\alpha_0}\right).$$

Nunmehr seien m und h_0 positive ganze Zahlen; m sei ungrade und $h_0 < \frac{1}{2}m$. Es sei ferner: $h = 2h_0$ oder $h = m-2h_0$, je nachdem $2h_0$ oder $m-2h_0$ kleiner als $\frac{1}{2}m$ ist. Endlich sei:

$$nh_0 \equiv \pm h'_0, \quad \text{also} \quad nh_0 \equiv h'_0\,\mathrm{sgn.\,R}\left(\frac{nh_0}{m}\right) \pmod{m}.$$

---

*) Vgl. meine Mittheilung im Sitzungsbericht der Akademie vom 12. Juni 1884.

wo auch h_0' positiv und kleiner als $\frac{1}{2}m$ vorausgesetzt ist. Alsdann kann $\alpha_0 = \frac{h_0}{m}$ und $\alpha = \frac{h}{m}$ gesetzt werden, und es wird daher:

$$n h_0 \equiv h_0' \operatorname{sgn.} \prod_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \pmod{m} \qquad \left(\begin{smallmatrix} 0 < h_0 < \frac{1}{2}m,\ 0 < h < \frac{1}{2}m \\ h = 2h_0 \text{ oder } m - 2h_0 \end{smallmatrix}\right).$$

Setzt man in dieser Congruenz der Reihe nach $h_0 = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1)$ und multiplicirt die dadurch entstehenden Congruenzen mit einander, so kommt:

$$n^{\frac{1}{2}(m-1)} \prod_h h \equiv \prod_h h . \operatorname{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \pmod{m} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{smallmatrix}\right),$$

und hieraus resultirt, wenn m als Primzahl vorausgesetzt wird, für das *Legendre*sche Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ die Gleichung:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right) \qquad \left(\begin{smallmatrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{smallmatrix}\right),$$

durch welche das Reciprocitätsgesetz, falls auch n als Primzahl angenommen wird, in unmittelbare Evidenz tritt.

Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes.

(Par M. le Dr. *Corrado Segre* à Turin.)

I.

1. Le moment de deux droites quelconques x, y peut être exprimé d'une manière qui nous sera utile au moyen de la distance d'un point quelconque X de l'une d'elles x à l'autre y et de l'angle que la normale au plan Xy fait avec x. Soient δ le segment qui mesure la plus petite distance des deux droites x, y et φ leur angle: leur moment*) sera $\delta \sin\varphi$. Il est clair qu'en nommant p la perpendiculaire abaissée du point X de x sur y on aura:

$$\delta = p\cos(p\delta).$$

Si maintenant, par un point quelconque de l'espace, l'on mène des droites parallèles à x, y, δ, p et à la normale n du plan Xy, et enfin une droite m dont la direction soit normale à y mais parallèle au plan des directions de x, y, on voit que les directions de m, n, x formeront un trièdre rectangle en m, dont l'hypoténuse sera l'angle (nx), et le cathète (mx) sera le complément de (xy), c'est-à-dire de φ, tandis que l'autre cathète (mn) sera égal à (δp). On aura donc:

$$\cos(nx) = \cos(mx)\cos(mn) = \sin\varphi\cos(p\delta),$$

et en conséquence

$$\delta\sin\varphi = p\sin\varphi\cos(p\delta) = p\cos(nx),$$

c'est-à-dire on a l'expression cherchée du moment de x, y:

$$\text{mom}(x, y) = p\cos(nx),$$

d'où l'on tire cette proposition: ***Si l'on multiplie la distance d'un point quelconque d'une droite à une autre droite par le cosinus de l'angle que la première***

*) Nous ne considérons que les valeurs absolues des moments des droites; car pour donner un signe à ces moments, il faudrait toujours considérer pour chaque droite une direction positive correspondante, tandis que nous nous proposons d'étudier des ensembles de droites indépendamment de la manière d'en fixer les directions positives.

droite fait avec la normale au plan qui joint l'autre à ce point, on aura un produit constant égal au moment des deux droites.

Ce théorème connu est dû, si nous ne nous trompons, à M. ***Drach,*** qui l'a donné comme cas particulier d'un autre théorème, qu'il a démontré par la voie analytique*).

2. Dans cette note nous avons surtout pour but d'étudier l'ensemble des droites qui ont un même moment donné m par rapport à une droite fixe r. Cherchons avant tout celles d'entre ces droites qui sont dans un plan donné quelconque π. Soit R le point d'intersection de ce plan avec la droite fixe r, et n la normale à ce plan (menée par R); en dénotant par (Rd) la distance de R à une droite quelconque d de π, on aura par le théorème précédent:

$$\mathrm{mom}(r, d) = (Rd)\cos(rn).$$

Donc pour que d soit telle que $\mathrm{mom}(r, d) = m$, on aura la condition:

$$(Rd) = \frac{m}{\cos(rn)} = \text{const.}$$

Nous concluons que: ***les droites d de l'espace pour lesquelles*** $\mathrm{mom}(r, d) = m$, ***forment un complexe tel que celles d'entre elles qui sont dans un plan quelconque, enveloppent un cercle ayant le centre sur la droite r et ayant son rayon exprimé par $\frac{m}{\cos(rn)}$, où n représente la normale à ce plan.***

Pour tous les plans parallèles entre eux et plus généralement pour tous les plans qui font un même angle avec la droite fixe r, ces ***cercles du complexe*** sont égaux. Pour les plans perpendiculaires à r, les rayons des cercles correspondants sont égaux à m et forment un cylindre droit C ayant r pour axe et m pour rayon. Pour tous les autres plans, l'angle (rn) n'étant plus nul, les rayons des cercles du complexe sont plus grands que m et vont en croissant avec cet angle; par conséquent pour les plans qui font un très petit angle avec r, les cercles correspondants sont très grands, et pour les plans parallèles à r, les cercles correspondants deviennent infinis.

3. Considérons l'intersection que fait un plan quelconque π avec le cylindre de révolution C: on sait que cette intersection est une ellipse dont le centre est le point d'intersection R de π avec r et dont l'axe focal est sur l'intersection de π avec le plan perpendiculaire à π mené par r.

---

*) V. ***Drach,*** *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe.* Math. Ann. II, pag. 128—139 (v. pag. 132).

En indiquant toujours par n la normale à π on voit donc que le demi-axe focal de cette ellipse sera donné par $\frac{m}{\cos(rn)}$; ainsi *dans chaque plan de l'espace le cercle du complexe a pour rayon le demi-axe focal de l'ellipse d'intersection de ce plan avec le cylindre C.* En d'autres termes: *les cercles qui touchent dans les sommets de l'axe focal les ellipses d'intersection des plans de l'espace avec le cylindre droit C, sont les cercles enveloppés par les droites de ces plans qui appartiennent à notre complexe.*

Ce complexe est donc parfaitement déterminé par le cylindre C, et cette proposition fournit en outre une propriété remarquable de ce cylindre. De plus nous voyons que tous les cercles du complexe sont extérieurs aux ellipses de C appartenant aux mêmes plans, c'est-à-dire: *les cercles du complexe touchent tous le cylindre C en deux points et ne présentent pas de points dans l'intérieur de celui-ci.* On en conclut que les droites du complexe ne peuvent pas couper ce cylindre; cependant il y a des droites qui le touchent en un point: ce sont celles dont la direction est normale à r. D'ailleurs on peut aussi tirer ces conclusions de la définition même du complexe; car comme le produit de la plus petite distance entre r et une quelconque d de ses droites par le sinus de l'angle (rd) doit être égal à m, il est clair que cette distance minima ne peut pas être inférieure à m et sera égale à m lorsque cet angle sera égal à $\frac{1}{2}\pi$.

4. Cherchons maintenant les droites du complexe qui passent par un point quelconque P de l'espace. Soit d une droite passant par P: si n est la normale au plan Pr, on aura par le théorème du n° 1:

$$\text{mom}(r, d) = (Pr)\cos(nd);$$

par suite si d est une droite du complexe, c'est-à-dire si $\text{mom}(r, d) = m$, on aura:

$$\cos(nd) = \frac{m}{(Pr)} = \text{const.}$$

Donc toutes les droites d du complexe, qui passent par le point P, feront avec la droite n un même angle, c'est-à-dire: *Les droites du complexe qui passent par un point quelconque P de l'espace, forment un cône droit ayant pour axe la normale en P au plan qui joint P à r et dont les génératrices font avec cet axe un angle dont le cosinus est donné par* $\frac{m}{(Pr)}$.

Ces *cônes du complexe* ne sont donc réels que pour les points P dont la distance à r n'est pas inférieure à m, c'est-à-dire pour les points extérieurs au cylindre C: ce qui s'accorde bien avec ce que nous avons

vu dans le n°. précédent. Pour les points P situés sur le cylindre C on aura $\cos(nd) = 1$, l'ouverture du cône se réduit à zéro, c'est-à-dire le cône se réduit à son axe. Donc par chaque point de C il ne passe qu'une seule droite réelle du complexe: la normale au plan qui joint ce point à r. Mais à mesure qu'un point P s'éloigne du cylindre C indéfiniment, c'est-à-dire à mesure que la distance (Pr) va en croissant, $\cos(nd)$ ira en diminuant indéfiniment de 1 à zéro: le cône du complexe correspondant à P a donc une ouverture qui ira en croissant continuellement, et pour un point P à l'infini ce cône se décomposera (comme nous allons voir plus distinctement tout de suite) en un couple de plans parallèles à r.

5. Par le point P extérieur au cylindre C on peut mener deux plans tangents de celui-ci: le cosinus de l'angle que chacun de ces plans fait avec la normale n au plan Pr est évidemment égal à $\frac{m}{(Pr)}$, et celui-ci sera aussi le cosinus de l'angle que font avec n celles des droites de ces plans qui passent par P et qui ont leurs directions normales à r. Donc ces deux droites appartiennent au cône de notre complexe qui correspond au point P, et ces deux plans tangents à C dans lesquels elles se trouvent, seront les plans tangents à ce cône le long de ces génératrices; c'est-à-dire qu'on a cette proposition: ***Tous les cônes du complexe sont doublement tangents au cylindre C: les deux droites passant par un point quelconque P et tangentes à la courbe d'intersection du cylindre C avec le plan mené par P normalement à r, touchent cette courbe précisément dans les deux points de contact de C avec le cône du complexe appartenant à P.*** — Au moyen du cylindre C on a donc une construction fort simple des cônes droits des droites du complexe qui passent par les différents points de l'espace.

6. Passons à examiner comment se composent les surfaces des points et des plans singuliers et la congruence des droites singulières de notre complexe. Nous avons vu (n° 2) que dans chaque plan π la courbe du complexe est un cercle dont le centre est sur l'axe r et dont le rayon est $\frac{m}{\cos(r\pi)}$ ou bien $\frac{m}{\sin(r\pi)}$. Cette courbe ne peut se décomposer que dans deux cas: 1°. lorsque $\sin(r\pi) = 0$, c'est-à-dire lorsque ce cercle se réduit à la droite à l'infini (comme droite double), 2°. lorsque $\sin(r\pi) = \infty$, c'est-à-dire lorsque, le rayon devenant nul, ce cercle se décompose en deux droites (coïncidentes, comme nous verrons) s'appuyant sur l'absolu (cercle imaginaire à l'infini). Dans le 1er cas le plan π sera parallèle à r, et

en effet toutes les droites d'un plan parallèle à r ayant évidemment la même distance de r, leur moment par rapport à r ne dépend plus que de leur direction, de sorte qu'il y a dans un tel plan deux directions faisant le même angle avec r et telles que toutes les droites de ce plan parallèles à l'une ou à l'autre d'elles ont avec r le moment donné m, c'est-à-dire appartiennent à notre complexe. Pour ceux des plans parallèles à r qui coupent le cylindre C, ces deux directions sont imaginaires; pour ceux qui touchent C, elles coïncideront avec la direction de r; enfin pour ceux qui sont extérieurs à C, ces deux directions seront réelles et distinctes. On a donc une première série de plans singuliers du complexe dans les plans qui passent par le point à l'infini de r: les centres des faisceaux de droites du complexe qui appartiennent à ces plans sont aussi des points à l'infini. — Ceux-ci sont même les seuls plans singuliers réels, car pour les autres plans singuliers on a, comme nous avons vu, $\sin(r\pi) = \infty$. Mais si l'on veut considérer aussi les éléments imaginaires, on voit que les plans tangents à l'absolu forment une autre série de plans singuliers: dans chacun de ces plans le cercle du complexe se réduit évidemment, comme lieu de points, à la droite qui joint le point de contact avec l'absolu au point d'intersection avec r; mais, comme enveloppe de droites, vu que ce cercle doit être (comme nous avons vu) doublement tangent à C, il se réduira aux deux faisceaux de droites ayant pour centres les deux points d'intersection de cette droite avec C.

Quant aux points singuliers nous avons vu que par chaque point P passent des droites du complexe qui forment un cône droit ayant pour axe la normale menée par P au plan Pr et doublement tangent à C; par conséquent chaque cône du complexe est doublement tangent soit à C, soit à l'absolu. Or si le point P va à l'infini, ce cône se décompose, par la définition même du complexe, en deux faisceaux de droites parallèles dont les plans seront parallèles à r et équidistants de cet axe. Si le point P se porte sur le cylindre C, nous avons déjà remarqué que le cône du complexe n'aura d'autre droite réelle que son axe: comme d'ailleurs il est doublement tangent à l'absolu, il se décomposera en deux plans imaginaires tangents à celui-ci et se coupant dans cette droite réelle.

Remarquons encore que, pour tous les plans d'un faisceau de plans parallèles entre eux et à r, la courbe du complexe se décompose en deux points de l'axe de ce faisceau et que tous les cônes du complexe qui appar-

tienent aux points de cet axe, ont celui-ci pour droite double: partant cet axe est une *droite double* du complexe. Donc en résumant nous concluons que:

Le complexe a pour droites doubles toutes les droites qui, dans le plan à l'infini, passent par le point à l'infini de r. Il a en conséquence le plan à l'infini (compté doublement) comme partie du lieu de ses points singuliers et le point à l'infini de r (compté doublement) comme partie de l'enveloppe de ses plans singuliers: les droites singulières qui correspondent soit à ces points soit à ces plans singuliers, sont précisément ce faisceau de droites doubles. La surface des points singuliers se compose en outre du cylindre droit C ayant r pour axe et m pour rayon: les droites singulières qui correspondent aux points de C forment la congruence quadratique des droites qui touchent C et qui sont en direction perpendiculaire à r, c'est-à-dire coupent la droite à l'infini qui est polaire de r relativement à l'absolu. L'enveloppe des plans singuliers se compose encore de l'absolu: les droites singulières qui correspondent aux plans tangents de l'absolu forment la congruence quadratique (imaginaire) des droites qui s'appuient sur r et sur l'absolu.

II.

1. Nous allons maintenant étudier le même complexe et en trouver d'autres propriétés par la voie analytique. Imaginons un système de trois axes rectangulaires dont la droite *r* soit l'axe des z. Les coordonnées d'une droite quelconque, joignant les points (xyz), $(x'y'z')$, seront par rapport à ces axes:

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z',$$
$$p_{23} = yz' - zy', \quad p_{31} = zx' - xz', \quad p_{12} = xy' - yx'.$$

Le moment de cette droite par rapport à l'axe des z, c'est-à-dire à *r*, sera, comme l'on sait

$$\frac{xy' - yx'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}} \text{*)}.$$

Par suite le complexe des droites dont le moment par rapport à *r* a une valeur (absolue) donnée *m*, a pour équation:

$$\frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2}} = m,$$

*) Nous avons donné l'expression plus générale du moment de deux droites en fonction de leurs coordonnées générales dans notre note *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX). On en tire l'équation de notre complexe quadratique sous sa forme la plus générale.

c'est-à-dire

$$p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2-\frac{1}{m^2}p_{12}^2 = 0.$$

En ajoutant cette équation à

$$2\lambda(p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}) = 0$$

et en formant le déterminant de la nouvelle équation, on obtient:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & & & & \\ \lambda & 0 & & & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ & & \lambda & 0 & & \\ & & & & 1 & \lambda \\ & & & & \lambda & -\frac{1}{m^2} \end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant est

$$-\lambda^4\left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)$$

et ses subdéterminants du 5e ordre ont tous le facteur λ^2, tandis que ceux du 4e ordre n'ont pas λ pour facteur commun. Donc la ***caractéristique*** de ce complexe dans la classification de M. *Weiler* *) est

$$[(22)11],$$

où le symbole (22) correspond à la racine quadruple $\lambda = 0$ du déterminant, tandis que les deux 1 correspondent à $\lambda^2+\frac{1}{m^2} = 0$, c'est-à-dire aux deux racines simples $\lambda = \pm\frac{i}{m}$.

8. L'équation du complexe nous donne pour le cône appartenant au point $P(xyz)$ l'équation en coordonnées variables x', y', z':

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-\frac{1}{m^2}(xy'-yx')^2 = 0,$$

et cette équation représente évidemment un cône droit dont l'axe est la normale au plan

$$xy'-yx' = 0,$$

c'est-à-dire au plan qui joint le point P à la droite r. — Comme le déter-

*) *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.* Math. Ann. VII. — Les complexes [(22)11] sont étudiés au n° 23 (pag. 184—186) de ce mémoire.

minant de cette équation, rendue homogène au moyen d'un facteur $t = 1$:

$$\begin{vmatrix} t^2-\frac{1}{m^2}y^2 & \frac{1}{m^2}xy & 0 & -xt \\ \frac{1}{m^2}xy & t^2-\frac{1}{m^2}x^2 & 0 & -yt \\ 0 & 0 & t^2 & -zt \\ -xt & -yt & -zt & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix}$$

a tous ses premiers subdéterminants affectés du facteur commun

$$t^2\left[\frac{1}{m^2}(x^2+y^2)-t^2\right],$$

il s'ensuit que la surface singulière de notre complexe se décompose, comme lieu de points, en le plan à l'infini ($t = 0$) compté deux fois, et en la surface

$$x^2+y^2 = m^2,$$

c'est-à-dire le cylindre droit C qui a r pour axe et m pour rayon.

9. L'équation du complexe nous donne de même pour la courbe du complexe appartenant au plan π

$$\xi x+\eta y+\zeta z+\tau = 0,$$

l'équation en coordonnées variables de plan ξ', η', ζ', τ':

$$(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2-\frac{1}{m^2}(\zeta\tau'-\tau\zeta')^2 = 0.$$

Or comme l'équation

$$(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2 = 0$$

est l'équation tangentielle du couple de points cycliques du plan π, on voit que l'équation précédente est l'équation tangentielle d'un cercle ayant pour centre le point

$$\zeta\tau'-\tau\zeta' = 0,$$

c'est-à-dire le point d'intersection du plan π avec l'axe r. On retrouve ainsi le résultat que les courbes du complexe sont des cercles ayant leurs centres sur la droite fixe r. — En formant encore le déterminant de l'équation tangentielle de ce cercle, on voit que ses subdéterminants du 3e ordre ont tous le facteur commun

$$\zeta^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

d'où l'on conclut que la surface singulière se décompose, comme enveloppe de plans, en le point à l'infini ($\zeta = 0$) de la droite r compté deux fois, et

en la courbe

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 0,$$

c'est-à-dire l'absolu.

10. La composition de la surface singulière, que nous avons ainsi retrouvée analytiquement, s'accorde avec ce qui arrive en général pour les complexes quadratiques dont la caractéristique est [(22) 11]. La propriété des courbes du complexe d'être des cercles doublement tangents au cylindre C, et celle des cônes du complexe d'être des cônes droits doublement tangents à ce même cylindre, ne sont que des conséquences de la propriété générale des coniques et des cônes d'un complexe quadratique quelconque d'être quatre fois tangents à la surface singulière. Ces propriétés subsisteront donc pour tous les complexes ***homofocaux***, c'est-à-dire ayant la même surface singulière que notre complexe.

L'équation de la série des complexes homofocaux au complexe

$$p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2-\frac{1}{m^2}p_{12}^2 = 0$$

s'obtient, comme on sait*), de la manière suivante: ajoutons à cette dernière équation

$$2\lambda(p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}) = 0,$$

formons l'équatiour éciproque de celle qu'on obtient ainsi, et mettons-y pour variables les coordonnées complémentaires de droites. On obtient ainsi immédiatement:

$$\lambda^2\Big[\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{14}^2+\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{24}^2+\lambda^2p_{34}^2-\frac{1}{m^2}\lambda^2p_{12}^2$$

$$-2\lambda\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{14}p_{23}-2\lambda\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{24}p_{31}-2\lambda^3p_{34}p_{12}\Big] = 0,$$

c'est-à-dire, divisant encore par λ^2 et se servant de la relation générale entre les coordonnées de droites:

$$\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{14}^2+\Big(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\Big)p_{24}^2+\lambda^2p_{34}^2-\frac{1}{m^2}\lambda^2p_{12}^2+\frac{2}{m^2}\lambda p_{12}p_{34} = 0.$$

Faisons varier λ dans cette équation: on aura tous les complexes homofocaux au nôtre. Cette série est du 2e degré, c'est-à-dire par chaque droite de l'espace il passe deux de ces complexes. Notre complexe correspond à

*) V. *Schur „Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades"*, Math. Ann. XVII. pag. 107—109. Avant de connaître cette note nous avions trouvé l'équation d'une série homofocale de complexes quadratiques en coordonnées tout-à-fait générales de droites (voir notre dissertation citée ci-après).

$\lambda = \infty$. Aux deux racines simples du déterminant $\lambda = \pm\frac{i}{m}$ correspondent les complexes de la série qui ont pour équations:

$$-\frac{1}{m^2}p_{34}^2 + \frac{1}{m^2}\,\frac{1}{m^2}p_{12}^2 \pm \frac{2}{m^2}\,\frac{i}{m}p_{12}p_{34} = 0,$$

ou bien

$$\left(\frac{1}{m}p_{12} \pm ip_{34}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire les deux complexes linéaires comptés deux fois:

$$\frac{1}{m}p_{12} + ip_{34} = 0, \quad \frac{1}{m}p_{12} - ip_{34} = 0.$$

Ces deux complexes linéaires imaginaires et en involution sont donc les complexes *fondamentaux* de la série de complexes homofocaux et de sa surface singulière, c'est-à-dire les seuls complexes linéaires (qui ne soient pas spéciaux) par rapport auxquels le cylindre C correspond à l'absolu.

Comme la valeur $\lambda = \infty$ qui correspond à notre complexe quadratique est la conjuguée harmonique de la racine $\lambda = 0$ par rapport aux deux racines $\lambda = \pm\frac{i}{m}$ du déterminant, on en conclut que parmi les complexes de la série homofocale le nôtre jouit de particularités projectives qui le distinguent parmi tous ceux de la même série: le rapport anharmonique qui est le seul invariant absolu des complexes quadratiques [(22) 11] a pour notre complexe la valeur -1 *). Cela s'accorde avec le fait que lorsque le cylindre C (et en conséquence toute la surface singulière) est donné, notre complexe lui aussi est tout-à-fait donné.

11. Parmi ces particularités projectives il y en a une qui regarde les droites singulières. Pour une valeur quelconque de λ le complexe correspondant de la série homofocale a ses droites singulières données par les équations:

$$(1.) \quad \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right)p_{14}^2 + \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right)p_{24}^2 + \lambda^2 p_{34}^2 - \frac{1}{m^2}\lambda^2 p_{12}^2 + \frac{2}{m^2}\lambda p_{12}p_{34} = 0,$$

$$\left(\lambda^2 p_{34} + \frac{1}{m^2}\lambda p_{12}\right)\left(-\frac{1}{m^2}\lambda^2 p_{12} + \frac{1}{m^2}\lambda p_{34}\right) = 0,$$

c'est-à-dire elles forment deux congruences quadratiques appartenant respec-

*) Voir le théorème sur les invariants absolus des complexes quadratiques, que nous avons donné au n° 141 de notre mémoire *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, serie II, tomo XXXVI).

tivement aux complexes linéaires

$$(2.) \quad p_{12}+\lambda m^2 p_{34} = 0,$$
$$(3.) \quad \lambda p_{12}-p_{34} = 0$$

(qui ne sont pas en général en involution, contrairement à ce que dit M. *Weiler*). Pour la première de ces congruences en substituant l'équation (2.) dans (1.), on a les deux autres équations suivantes:

$$p_{14}^2+p_{24}^2-\frac{1}{m^2}p_{12}^2 = 0, \quad p_{14}^2+p_{24}^2-m^2\lambda^2 p_{34}^2 = 0,$$

qui montrent que cette congruence se compose de droites tangentes au cylindre fixe C et coupant le plan à l'infini dans les points de la conique qui a dans ce plan pour équation

$$x^2+y^2-m^2\lambda^2 z^2 = 0.$$

En d'autres termes cette congruence se compose, pour un complexe quelconque λ de la série, de droites tangentes au cylindre C et faisant avec l'axe r de celui-ci un même angle, dont le cosinus est donné par $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\lambda^2}}$. Or pour notre complexe on a $\lambda = \infty$, et cet angle se réduit en conséquence à l'angle droit: cette conique du plan à l'infini se réduit à la droite (double) $z = 0$, qui est aussi l'axe du complexe spécial $p_{34} = 0$, auquel se réduit dans ce cas le complexe linéaire (2.).

Pour la congruence de droites singulières appartenant au complexe linéaire (3.) on a, en combinant cette équation avec (1.):

$$p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2 = 0, \quad p_{14}^2+p_{24}^2+\lambda^2 p_{12}^2 = 0,$$

d'où l'on voit que cette congruence se compose de droites qui coupent l'absolu et qui touchent un cylindre droit (imaginaire) ayant r pour axe et le rayon égal à $\frac{i}{\lambda}$. Pour notre complexe quadratique ce cylindre droit se réduit à son axe, c'est-à-dire le complexe linéaire (3.) auquel appartient cette congruence de droites singulières, devient pour $\lambda = \infty$ le complexe spécial $p_{12} = 0$ ayant r pour axe.

12. En transformant projectivement notre complexe quadratique, on n'obtient donc pas le complexe le plus général de la classe [(22)11], mais bien l'un de ceux qui appartiennent à la catégorie des complexes des droites coupant harmoniquement deux surfaces du 2[e] ordre, catégorie que

nous avons étudiée avec notre ami M. *Loria* dans un mémoire récent*). Cela résulte immédiatement des caractères que nous avons trouvés dans ce mémoire pour le complexe [(22)11] de cette catégorie. D'ailleurs on peut vérifier sans difficulté que les droites de notre complexe coupent harmoniquement les deux quadriques (ayant r pour axe de rotation)

$$x^2+y^2+\frac{m^2}{k^2}z^2 = m^2-k^2, \quad x^2+y^2-\frac{m^2}{k^2}z^2 = m^2+k^2,$$

où k^2 représente un paramètre arbitraire. En particulier, si l'on pose $k^2 = m^2$, on voit que notre complexe peut être considéré comme composé des cordes de la surface

$$x^2+y^2-z^2 = 2m^2$$

qui sont vues sous un angle droit à partir du centre de celle-ci.

13. La série homofocale que nous avons considérée se compose, comme nous avons déjà remarqué, de ∞^1 complexes quadratiques dont toutes les coniques sont des cercles et dont tous les cônes sont des cônes droits (ce sont même les complexes quadratiques les plus généraux qui jouissent de cette propriété). En outre ces cercles et ces cônes sont tous doublement tangents au cylindre C. Dans un plan quelconque π ces cercles forment donc l'une des deux séries de cercles doublement tangents à l'ellipse d'intersection de π avec C; nous avons déjà reconnu que l'un de ces cercles (celui qui appartient à notre complexe) touche cette ellipse dans les sommets de son axe focal: donc cette série de cercles doublement tangents à l'ellipse est celle dont les cordes de contact sont parallèles à cet axe, c'est-à-dire dont les centres ont pour lieu l'autre axe de l'ellipse. Parmi ces cercles il y en a deux de rayon nul et dont les centres sont les foyers imaginaires de l'ellipse: ces cercles se réduisent, comme enveloppes, à leurs centres comptés doublement et ils correspondent donc aux deux complexes de la série homofocale qui se réduisent aux deux complexes linéaires fondamentaux comptés doublement. Nous obtenons ainsi une propriété remarquable du cylindre droit: *Un cylindre droit quelconque est coupé par chaque plan de l'espace en une ellipse dont les deux foyers imaginaires sont les points qui correspondent à ce plan par rapport à deux complexes linéaires (imaginaires conjugués et en involution entre eux).* — Cette propriété ne subsiste pas

*) Voir la note *Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (Math. Ann. XXIII, pag. 213—234): notre complexe y est considéré, du point de vue projectif, à la page 230.

pour les foyers réels, ni en général pour des surfaces quadriques qui ne soient pas des cylindres droits.

14. On peut donner une définition géométrique d'un complexe quadratique quelconque de la série homofocale à notre complexe analogue à celle donnée pour celui-ci. L'équation (nº 10) de ce complexe quelconque (λ) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)(p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2)-\frac{1}{m^2}(p_{34}^2+\lambda^2p_{12}^2-2\lambda p_{12}p_{34}) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\lambda p_{12}-p_{34}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}} = \pm m\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{m^2}}.$$

Posons $\lambda = -\frac{1}{k}$; alors cette équation deviendra:

$$\frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}+k\frac{p_{34}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}} = \mp\sqrt{m^2+k^2},$$

et elle pourra aussi s'écrire, en vertu des formules connues, en désignant par d la droite de coordonnées p_{ik}:

$$\text{mom}(r, d)+k\cos(\widehat{rd}) = \mu,$$

où μ est une constante donnée par:

$$\mu^2-k^2 = m^2.$$

Nous concluons donc que l'un quelconque des complexes de la série homofocale se compose des droites d pour lesquelles la quantité $\text{mom}(r,d)+k\cos(rd)$ a une valeur absolue constante μ, les deux constantes k et μ variant avec le complexe $\left(\text{puisque } k = -\frac{1}{\lambda}\right)$ de façon que $\mu^2-k^2 = m^2$. Or M. *Klein* *) a nommé *moment* de deux complexes linéaires, dont les axes soient r et r' et les paramètres k, k', la quantité $\text{mom}(r,r')+(k+k')\cos(rr')$: en particulier le *moment* d'une droite d et du complexe linéaire qui a r pour axe et k pour paramètre (c'est-à-dire qui a pour équation $p_{12}+kp_{34} = 0$) sera la quantité $\text{mom}(r,d)+k\cos(rd)$. Donc nous pouvons dire que l'un quelconque des complexes de la série est *le complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à un complexe linéaire donné* dont (3.) est l'équation; et nous pourrons énoncer la proposition suivante:

Chaque complexe quadratique de la classe [(22) 11] *est une transformation projective d'un complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à un complexe linéaire fixe. La série homofocale de ce dernier complexe qua-*

---

*) *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten* (Math. Ann. II, p. 368).

dratique se compose aussi de complexes des droites qui ont un même moment donné μ par rapport à un complexe linéaire dont l'axe r est toujours le même, tandis que le paramètre k varie avec le complexe de la série de façon que $\mu^2 - k^2$ ait une valeur constante. En nommant m^2 cette valeur, la surface singulière de toute la série homofocale se composera de l'absolu et du cylindre droit ayant r pour axe et m pour rayon. La série homofocale de complexes quadratiques correspond donc univoquement au faisceau des complexes linéaires ayant r pour axe; la congruence de deux complexes correspondants se compose de droites qui coupent l'absolu et qui forment l'une des deux congruences quadratiques de droites singulières du complexe quadratique. Parmi ces complexes linéaires celui dont le paramètre k est nul, correspond à un complexe quadratique de la série homofocale, lequel sera le lieu des droites qui ont un même moment m par rapport à la droite r.

III.

15. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1 par rapport à deux droites fixes r, r_1, appartiennent aux deux complexes quadratiques définis respectivement par ces deux conditions, et forment donc une congruence du 4e degré. Mais on sait aussi que lorsqu'on donne la valeur absolue du rapport des moments d'une droite par rapport à deux droites fixes r, r_1, cette droite appartient, à l'un ou à l'autre de deux certains complexes linéaires en involution, relativement auxquels r, r_1 sont des droites conjuguées. Donc notre congruence du 4e degré se décompose en deux congruences quadratiques appartenant à ces deux complexes linéaires. — Dans un plan quelconque les droites des deux complexes quadratiques enveloppent, comme nous avons vu, respectivement deux cercles ayant leurs centres sur r, r_1. La droite qui joint ces deux centres appartient en conseguence aux deux complexes linéaires nommés. Les 4 tangentes communes à ces cercles se coupent deux-à-deux sur cette droite dans leurs deux centres de similitude: on en déduit que ceux-ci sont les deux points qui correspondent à notre plan par rapport à ces deux complexes linéaires. Donc dans chaque plan les deux droites de l'une congruence quadratique sont les deux tangentes qui se coupent dans un centre de similitude, celles de l'autre congruence sont celles qui se coupent dans l'autre centre de similitude. — De même on peut distinguer facilement, parmi les 4 droites ayant par rapport à r, r_1 les moments m, m_1 et passant par un point quelconque, celles qui appartiennent

à l'une congruence quadratique de celles qui appartiennent à l'autre: car les plans des deux couples de droites se couperont dans la droite qui passe par ce point et coupe les deux droites r, r_1 (puisque cette droite appartient aux deux complexes linéaires qui contiennent ces congruences quadratiques).

L'une quelconque de ces deux congruences quadratiques peut être considérée comme l'intersection du complexe quadratique des droites ayant le moment m par rapport à r avec un complexe linéaire quelconque: la droite conjuguée r_1 de r par rapport à celui-ci jouira de la propriété que toutes les droites de cette intersection auront avec elles un moment m_1 fixe (égal au produit de m par le *module* du complexe linéaire par rapport aux deux droites conjuguées r_1, r). La droite qui joint les points à l'infini de r et r_1 est une droite double de la congruence quadratique, car elle appartient à notre complexe linéaire et est une droite double du complexe quadratique. Elle est donc aussi une droite double de la surface focale de cette congruence. En outre comme par chaque point de l'absolu il passe seulement un faisceau (dont le plan passe par r) de droites du complexe quadratique, ce point sera un foyer pour la droite de la congruence qui appartient à ce faisceau. Donc *la surface focale de notre congruence quadratique a une droite double à l'infini et coupe encore le plan à l'infini suivant l'absolu.*

Cette surface focale est donc une „Complexfläche", et il est facile de voir que du point de vue de la géométrie projective elle ne présente pas d'autres singularités.

16. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1, m_2 par rapport à 3 droites données r, r_1, r_2 appartiennent à l'intersection de 3 complexes quadratiques et forment en conséquence une surface réglée du 16e degré. Mais on voit de la même manière que pour les congruences considérées ci-dessus, que cette surface réglée se décompose en 4 surfaces réglées du 4e degré appartenant respectivement à 4 congruences linéaires communes chacune à trois complexes linéaires pour lesquels resp. les droites rr_1, r_1r_2, r_2r sont deux droites conjuguées. Chacune de ces 4 congruences linéaires contient donc les droites qui coupent rr_1r_2 et a en conséquence pour directrices deux génératrices (du même mode de génération) de la surface quadrique déterminée par les génératrices rr_1r_2. Ces deux directrices sont des directrices doubles pour la surface réglée du 4e degré correspondante, qui ne présente aucune autre particularité projective.

17. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1, m_2, m_3 par

rapport à 4 droites données r, r_1, r_2, r_3 sont au nombre de 32, et elles se divisent en 8 groupes de 4, dont chaque groupe appartient à un système de génératrices d'une surface quadrique qui contient dans le même système les deux droites qui coupent simultanément r, r_1, r_2, r_3. Cela résulte encore de la considération des complexes linéaires des droites dont les moments par rapport à rr_1, rr_2, rr_3 ont les rapports donnés $m:m_1$, $m:m_2$, $m:m_3$. Chacune de ces conditions détermine deux complexes linéaires: on peut donc prendre 3 de ces complexes, un pour chaque couple, en 8 manières diverses et les droites cherchées devront appartenir à l'une des 8 surfaces réglées quadriques d'intersection de ces complexes.

Turin, le 6 janvier 1884.

Principien der Statik monocyklischer Systeme*).

(Von Herrn *H. von Helmholtz.*)

Ich verstehe unter ***monocyklischen Systemen*** solche mechanische Systeme, in deren Innerem eine oder mehrere stationäre, in sich zurücklaufende Bewegungen vorkommen, die aber, wenn es mehrere sind, in ihrer Geschwindigkeit nur von einem Parameter abhängen. Ich setze ferner voraus, dass zwischen den einzelnen Körpern, welche das System bilden, nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen, während die äusseren Kräfte, welche noch hinzukommen, nicht nothwendig conservativ zu sein brauchen. Ich bezeichne die Aufgaben, die ich behandeln will, als ***statische***, insofern vorausgesetzt wird, dass die Aenderungen, welche im Zustande des Systems erfolgen, mit so geringer Geschwindigkeit vor sich gehen, dass das System sich während derselben niemals merklich von solchen Zuständen entfernt, in denen es dauernd verweilen könnte.

Das Hauptinteresse solcher Untersuchungen liegt darin, dass auch die Wärmebewegung, wenigstens in ihren nach aussen hin beobachtbaren Wirkungen, die wesentlichen Eigenthümlichkeiten eines monocyklischen Systems zeigt, und dass namentlich die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der Arbeitsäquivalente, die in die Form von Wärme übergegangen sind, denen der monocyklischen Systeme unter gewissen Bedingungen zukommt. Zwar ist die Wärmebewegung nicht im strengen Sinne monocyklisch. Jedes einzelne Atom wechselt wahrscheinlich in der Art seiner Bewegungen, und erst dadurch, dass in einer ungeheuer grossen Anzahl von Atomen fortdauernd alle möglichen Stadien der Bewegung repräsentirt sind, wenn auch jedes einzelne Stadium bald von diesem bald von jenem Atome ausgeführt wird, tritt der mechanische Charakter einer monocyklischen Bewegung ein.

*) Die ersten drei Paragraphen sind ziemlich unveränderte Abdrücke meiner Mittheilung an die Akademie der Wiss. zu Berlin vom 6. und 27. März 1884; die späteren enthalten neue Generalisationen und sind ganz umgearbeitet.

In den theoretischen Untersuchungen über Wärmebewegung, so weit solche bisher durchführbar waren, müssen wir fortdauernd mit Durchschnittswerthen der in der Zeit für dasselbe Theilchen auf einander folgenden Werthe rechnen. Diejenigen Gesetze der Bewegung, welche, trotz des Schwankens der Einzelwerthe, sich hierbei nachweisen lassen, können dadurch nicht ungültig werden, dass der Durchschnittswerth bei den monocyklischen Systemen aus lauter gleichen Einzelwerthen zu nehmen ist. In diesem Sinne schliessen sich die vorzulegenden Studien an die Theorie der Wärme an.

§ 1.

Recapitulation der Gesetze der Wärme.

Wir setzen voraus, dass wir den Zustand eines in allen seinen Theilen gleich temperirten Körpers oder Systems von Körpern vollständig charakterisiren können durch die absolute Temperatur ϑ und durch eine gewisse Anzahl von Parametern p_a, welche so gewählt sind, dass Aenderung der Temperatur ohne Aenderung der Grössen p_a die Einnahme oder Ausgabe keiner anderen Arbeitsform als eines Quantums Wärme bedingt. Es werden in diesem Falle die Parameter p_a Raumabmessungen, im weiteren Sinne genommen, sein müssen. Unter ihnen kommt sehr gewöhnlich das Volumen des Ganzen oder einzelner Theile vor, aber sie können auch angeben, wie viel von einer besonderen Substanz oder wie viel Elektricität in einem bestimmten Raume zu finden sei.

Die frei verwandelbare, also nicht in Wärme übergeführte Arbeit, welche das betrachtete System nach aussen hin abgiebt, wenn der Parameter p_a in den Werth (p_a+dp_a) übergeht, bezeichne ich mit $P_a . dp_a$. Die Grösse P_a ist also das ***Kraftmoment*** der innern Kräfte, welches auf Vergrösserung des Parameters p_a hinwirkt. Es wäre, wie mir scheint, nichts dagegen einzuwenden, dass man P_a als ***Kraft in Richtung von*** p_a bezeichnete, wie dies schon in vielen Beispielen der Anwendung geschehen ist. Jede der Grössen P_a ist im Allgemeinen Function des ϑ und der sämmtlichen p_a. Wie die den einzelnen P_a das Gleichgewicht haltenden Componenten gegebener äusserer Kräfte zu finden und zu sondern sind, ist in den Lehrbüchern genügend behandelt.

Wir bezeichnen ferner mit U die gesammte innere Energie des Systems und mit S seine Entropie. Beide Grössen sind ebenfalls Functionen

von ϑ und den p_a. Endlich nennen wir dQ die während einer verschwindend kleinen Aenderung der Grössen ϑ und p_a in das System eingetretene Wärme, gemessen durch ihr Arbeitsäquivalent. Dann ist bekanntlich

$$(1.)\quad \begin{cases} dQ = dU + \Sigma(P_a . dp_a) \\ \quad\;\, = \vartheta . dS. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bilden die Grundlage der mechanischen Wärmetheorie. Aus ihnen folgt in bekannter Weise, dass von der Wärme dQ_1, die bei der Temperatur ϑ_1 des Körpers in ihn eintritt, immer nur ein Theil in frei verwandelbare Arbeit übergeführt werden kann. Wenn so viel Wärme dQ_0 in der Temperatur ϑ_0 abgegeben wird, dass schliesslich der ursprüngliche Zustand des Körpers in einem vollkommen reversiblen Processe wieder hergestellt werden kann, ist

$$\frac{dQ_1}{\vartheta_1} = \frac{dQ_0}{\vartheta_0},$$

und es wird also dabei in andre Arbeit verwandelt das Quantum:

$$dQ \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1} = dQ_0 \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_0}.$$

Mit Bezug auf das Folgende erlaube ich mir noch folgende Bemerkungen zu machen: Die wesentliche physikalische Bedeutung der Temperatur ϑ ist die, dass ihre Gleichheit oder Ungleichheit zwischen zwei Körpern darüber entscheidet, ob und in welcher Richtung Wärme vom einen zum andern übergehen könne. Zwei Körper von gleicher Temperatur, die sich gegenseitig berühren, stören sich gegenseitig nicht in ihrer Wärmebewegung. Sie bilden, so lange vollkommene Ausgleichung der Temperatur zwischen ihnen stattfinden kann, wiederum ein einziges zusammengesetztes Körpersystem, auf welches die Gleichungen (1.) angewendet werden können. Unterscheiden wir die Grössen, welche sich auf die einzelnen Theilsysteme beziehen, durch die Indices 1 und 2, so ist für gleichzeitige Aenderungen

$$dQ_1 = dU_1 + \Sigma(P_a . dp_a) = \vartheta . dS_1,$$
$$dQ_2 = dU_2 + \Sigma(P_b . dp_b) = \vartheta . dS_2;$$

also wenn wir addiren:

$$d(Q_1 + Q_2) = d(U_1 + U_2) + \Sigma(P . dp) = \vartheta . d(S_1 + S_2).$$

Die Summe der Kraftmomente ist in der letzten Gleichung auf alle Kräfte beider Systeme zu erstrecken; $(U_1 + U_2)$ ist die gesammte Energie des ver-

einigten Systems, $d(Q_1+Q_2)$ die gesammte zugeleitete Wärme, und die Gleichung zeigt, dass (S_1+S_2) die Entropie des vereinigten Systems ist.

Ohne Zuleitung von Wärme, wenn also $dQ = 0$, ist in jedem Einzelsystem auch $dS = 0$, oder S constant für alle reversiblen Processe.

Dies gilt für S_1 und S_2, so lange die beiden Körper einzeln sind, gilt aber auch für die Summe (S_1+S_2), wenn sie mit gleicher Temperatur vereinigt werden. Daraus folgt der von Herrn *Clausius* gezogene Schluss, wonach die Summe der Entropiewerthe S also weder in der Trennung noch in der Verbindung durch reversible Processe geändert werden kann.

Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, für beliebig viele Körper, die beliebig getrennt und in gleicher Temperatur verbunden werden können, und diese Folgerung fliesst vollständig aus den beiden Gleichungen (1.) her. Da diese Sätze für unbeschränkte Veränderungen der Parameter p_a und p_b gelten, so gelten sie auch im Fall, wo feste Verbindung beider Körper Beschränkungen in der Veränderlichkeit der p einführt.

Die Entscheidung über die Richtung des Wärmeflusses oder aber das Stattfinden von Wärmegleichgewicht würde auch nach der Ungleichheit oder Gleichheit von Werthen einer beliebig gewählten Function der Temperatur entschieden werden können, die deren Werth eindeutig bestimmt. Aus

$$\vartheta_1 = \vartheta_2$$

folgt auch

$$f(\vartheta_1) = f(\vartheta_2).$$

Die verschiedenen Thermometerscalen des Quecksilber-, Alkohol-, Luftthermometers geben bekanntlich solche nach der Art des thermometrischen Körpers verschiedene Functionen von ϑ.

Andererseits, wenn man unter s eine Function von S versteht, so würde man zu setzen haben

$$dQ = \vartheta\cdot\frac{\partial S}{\partial s}\cdot ds,$$

und wenn man bezeichnet:

$$\vartheta\cdot\frac{\partial S}{\partial s} = \eta,$$

so erhält man

$$(1''.)\qquad dQ = \eta . ds.$$

Das s als Function von S ist, wie dieses, eine Function der p_a und des aus der Gleichung (1″.) verschwundenen ϑ. Da η nach seiner obigen

Definition eine Function des ϑ und der p_a ist, so kann ϑ aus η und den p_a bestimmt, und η an Stelle von ϑ als unabhängige Variable in die Werthe von U, p_a und s eingeführt werden. Die Gleichungen

$$(1^b.)\quad \begin{cases} dQ = dU + \Sigma(P_a . dp_a) \\ = \eta . ds \end{cases}$$

haben dann genau dieselbe Form, wie die Gleichungen (1.), aber es findet der wichtige Unterschied statt, dass η nicht mehr diejenige Grösse ist, deren Gleichheit das Wärmegleichgewicht zwischen zwei Körpern anzeigt. Diese Eigenschaft kommt nur der einen $\eta = \vartheta$ in der ganzen Reihe der Functionen zu, die durch die Gleichung (1^a.) gegeben sind.

Endlich ist noch auf einen Umstand zu merken, den ich schon in meiner ersten thermodynamischen Abhandlung vom 2. Februar 1882 betont habe. In den Gleichungen (1.) kommt als Arbeit keine lebendige Kraft der Theile des Systems vor, d. h. es ist vorausgesetzt, dass die Aenderungen dp_a so langsam vor sich gehen, dass die lebendigen Kräfte der in geordneter Bewegung begriffenen Massen gegen die übrigen Arbeitsäquivalente verschwinden. Auch ist weiter vorausgesetzt, dass die Aenderungen der einzelnen Theile des Systems so langsam erfolgen, dass eine vollständige Ausgleichung ihrer Temperaturen stattfinden kann. Also gelten die Gleichungen (1.) nur für *Aenderungen $d\vartheta$ und dp_a von verschwindender Geschwindigkeit.* In diesem Sinne sind die besprochenen Gleichungen der Thermodynamik also auch nur in dem oben erörterten Sinne als Gesetze der Statik thermischer Systeme zu betrachten, und wir haben nur in den Gesetzen der Statik monocyklischer Systeme die Analoga zu suchen. Uebrigens sind beide dem *Gesetze von den virtuellen Geschwindigkeiten,* welches sich auf ganz unbewegte Systeme bezieht, darin gleich, dass auch dieses die bei langsamer Bewegung ausführbaren Arbeitsübertragungen umfasst.

Die Zurückführung der in den Gleichungen (1.) vorkommenden Functionen auf die Differentialquotienten einer einzigen Function, wie sie Hr. *Massieu**) zuerst ausgeführt hat, kann, wie schon Hr. *Gibbs***) gezeigt hat, auch an der allgemeinen Form (1^b.) ausgeführt werden, wenn man η und die p_a als unabhängige Variable benutzt. Dann ist zu setzen

---

*) Mémoires des Savants étrangers t. XXII. Journal de Physique par *d'Almeida* t. VI. p. 216.

**) Transactions Connecticut Acad. III. p. 108—248; 343—524. *Silliman*'s Journal 1878. XVI. p. 441—458.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot d\eta + \sum_{a}\left[\frac{\partial U}{\partial p_a}\cdot dp_a\right],$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \eta}\cdot d\eta + \sum_{a}\left[\frac{\partial s}{\partial p_a}\cdot dp_a\right],$$

und es folgt, wenn wir setzen

$$(1^c.)\qquad H = U - \eta . s,$$

aus den Gleichungen (1^b.):

$$\frac{\partial U}{\partial p_a} + P_a = \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial p_a},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial \eta}$$

oder

$$(1^d.)\qquad \begin{cases} P_a = -\dfrac{\partial H}{\partial p_a}, \\ s = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}, \\ U = H - \eta\cdot\dfrac{\partial H}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Dies sind die drei Beziehungen, welche ich den thermodynamischen Folgerungen in meinen früheren Mittheilungen zu Grunde gelegt hatte, mich beschränkend auf den engeren Fall, wo $\eta = \vartheta$. Die Function H ist dort mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet und *freie Energie* genannt.

Der Werth des H ist natürlich verschieden je nach der Wahl des η. Denn das in seinem Werthe (1^c.) vorkommende Product

$$\eta\cdot s = \vartheta\cdot s\cdot\frac{\partial S}{\partial s}$$

variirt mit der Wahl des s als Function von S. Diese verschiedenen Werthe des H sind also alle in *Jacobis* Sinne Kräftefunctionen für die mechanischen Leistungen des Systems, aber sie entsprechen der unterscheidenden Bedingung, dass ihre besondere Variable η constant sei. Die von mir gebrauchte Kräftefunction ist die isotherme; man kann aber, wie Hr. *Gibbs* zeigte, auch eine adiabatische u. s. w. bilden; die letztgenannte fällt zusammen mit der Function U, wie die Gleichungen (1^b.) unmittelbar zeigen, wenn man darin die p_a und s als unabhängige Variable einführt.

Nun liegt in dem Umstande, dass wir das Arbeitsäquivalent der Wärmemenge

$$dQ = dU + \Sigma(P_a . dp_a)$$

in der Form

$$dQ = \eta . ds$$

ausdrücken können, nichts für die hier vorkommenden physikalischen Grössen Charakteristisches. Denn diese Umformung kann jedenfalls für jede Art von Abhängigkeit zwischen den Functionen U, P_a und p_a vollzogen werden, wenn nur die P_a mit U und den p_a sich continuirlich ändern. Es muss sich immer das Integral der Gleichung

$$dQ = 0$$

in der Form

$$s = \text{Const.}$$

oder

$$S = f_{(s)} = \text{Const.}$$

bilden lassen, welches das Gesetz der adiabatischen Aenderungen ausdrückt. Wenn also für Aenderungen des U und der p_a ist:

$$0 = dU + \Sigma[P_a . dp_a],$$

so ist auch immer:

$$0 = \frac{\partial s}{\partial U} \cdot dU + \Sigma\left[\frac{\partial s}{\partial p_a} \cdot dp_a\right],$$

welche Gleichungen für übrigens beliebige Werthe des dU und der dp_a nur dann aus einander folgen, wenn

$$\frac{\partial s}{\partial U} = \frac{1}{P_a} \cdot \frac{\partial s}{\partial p_a}.$$

Wenn wir also die erste der Gleichungen (1^b.) mit $\frac{\partial s}{\partial U}$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{\partial s}{\partial U} \cdot dQ = ds,$$

und wenn wir η definiren durch die Gleichung

$$\eta \cdot \frac{\partial s}{\partial U} = 1,$$

so ergiebt sich

$$dQ = \eta . ds.$$

Das für die physikalischen Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung Charakteristische ist also nicht der Umstand, dass der Ausdruck für dQ sich in die letztgenannte Form bringen lässt, sondern liegt allein darin, dass einer unter den möglichen integrirenden Nennern η der Gleichung $dQ = 0$ gleichen Werth haben muss für je zwei Körper, zwischen denen Wärmegleichgewicht besteht.

§ 2.

Die allgemeinen Gleichungen der Mechanik für polycyklische Systeme.

Wir setzen zunächst voraus ein beliebig zusammengesetztes mechanisches System, zwischen dessen einzelnen Theilen nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen, und dessen augenblickliche Lage durch eine Anzahl allgemeiner Coordinaten p_a (die also nothwendig Abmessungen räumlicher Grössen sein müssen) vollständig bestimmbar ist. Die Momente äusserer Kräfte dagegen, welche nicht conservativ zu sein brauchen, und welche auf Vergrösserung der Coordinaten p_a hinwirken, bezeichnen wir. wie vorher, mit $(-P_a)$, so dass

$$P_a \, . \, dp_a$$

die Arbeit ist, welche die inneren Kräfte des Systems in der Ueberwindung jener äusseren Kraftmomente während der Aenderung dp_a ausüben. Wir setzen ferner zur kürzeren Bezeichnung die Differentialquotienten

$$(2.) \qquad \frac{dp_a}{dt} = q_a,$$

die potentielle Energie des Systems gleich Φ, die lebendige Kraft gleich L. Die erstere, Φ, ist unter den genannten Bedingungen eine Function der Coordinaten p_a allein, die zweite, L, eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q_a, deren Coefficienten Functionen der p_a sind. Bei der Bildung der partiellen Differentialquotienten von L nach den p_a und den q_a werden diese als unabhängige Variable betrachtet, und die in Gleichung (2.) ausgesprochene Beziehung zwischen ihnen nicht berücksichtigt. Aus der angegebenen Beschaffenheit der Function L folgt bekanntlich:

$$(2^a.) \qquad 2L = \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial L}{\partial q_a} \right].$$

Unter diesen Umständen sind nach *Lagrange* die Bewegungsgleichungen des Systems von der Form:

$$(2^b.) \qquad P_a = -\frac{\partial}{\partial p_a}[\Phi - L] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_a}\right].$$

Wenn wir setzen:

$$(2^c.) \qquad \Phi - L = H,$$

und bemerken, dass, weil Φ von den q_a unabhängig ist,

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = -\frac{\partial H}{\partial q_a}:$$

so können wir die genannten Bewegungsgleichungen auch schreiben:

$$(2^d.)\quad P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_a}\right].$$

Dann ist die Gesammtenergie:

$$U = \Phi + L$$

$$(2^e.)\quad = H - \Sigma\left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a}\right].$$

An diesem allgemeinsten Ausdruck der Bewegungsgleichungen wollen wir nun folgende Beschränkungen einführen:

1. Für eine besondere Gruppe der Coordinaten, die wir durch den Index $\mathfrak{b}$ unterscheiden wollen, und die wir als schnell veränderlich betrachten, nehmen wir an, dass die ihrer Veränderung entsprechende Art der Bewegung eine in sich zurücklaufende sei, und dass sich während dieser Bewegung weder Φ noch L merklich ändern, so dass also beide Grössen zwar von den $q_\mathfrak{b}$, aber nicht von den $p_\mathfrak{b}$ abhängig seien. Unter dieser Voraussetzung wird Gleichung ($2^d.$)

$$(3.)\quad P_\mathfrak{b} = +\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}\right].$$

Wenn wir diese Gleichung mit $q_\mathfrak{b}.dt$ auf beiden Seiten multipliciren und setzen

$$P_\mathfrak{b}.q_\mathfrak{b}.dt = -dQ_\mathfrak{b},$$

so ist $dQ_\mathfrak{b}$ die auf Beschleunigung der Bewegung $q_\mathfrak{b}$ verwendete äussere Arbeit. Wenn wir also zu kürzerer Bezeichnung den Werth

$$(3^a.)\quad \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} = -s_\mathfrak{b}$$

setzen, so ergiebt (3.):

$$(3^b.)\quad dQ_\mathfrak{b} = q_\mathfrak{b}.ds_\mathfrak{b},$$

worin das $ds_\mathfrak{b}$ das vollständige Differential der Grösse $s_\mathfrak{b}$ bezeichnet.

Beispiele solcher Bewegungen wären Kreisel in reibungslosen Axenlagern laufend, symmetrisch um die Rotationsaxe gebaut. Wenn wir als Parameter $q_\mathfrak{b}$ die Winkelgeschwindigkeit setzen, wäre $s_\mathfrak{b}$ das Moment der Rotationsbewegung, d. h. das Product aus dem Trägheitsmoment und der Winkelgeschwindigkeit.

Ein anderes Beispiel wäre der Fluss einer reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich zurücklaufenden Canale, mit elastischen Wänden, also dehnbar im Querschnitt, biegsam und dehnbar in der Länge. Wenn wir die Menge der in der Secunde durch jeden Querschnitt ω strömenden Flüssig-

keit als q_b benutzen, wäre das s_b

$$s_b = \int u . dx,$$

worin dx ein Längenelement der Axe des Canals und $u = \frac{1}{\omega} \cdot q$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen in Richtung von dx bezeichnet.

2. Uebrigens wollen wir voraussetzen, wie dies in den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie erwähntermaassen immer geschehen ist, dass die Aenderungen aller anderen Parameter p_a und ebenso die der Grössen q_b mit verschwindender Geschwindigkeit erfolgen, so dass alle mit q_a, $\frac{dq_a}{dt}$ oder $\frac{dq_b}{dt}$ multiplicirten Ausdrücke als verschwindende Grössen erster Ordnung zu behandeln sind.

Es setzt dies voraus, dass die äusseren Kräfte, die auf das System wirken, sich niemals weit von den Werthen entfernen, welche sie haben müssten, um die p_a und q_b constant zu machen, so dass die sämmtlichen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten, die in den Gleichungen (2^d.) vorkommen, sehr klein werden, und das System sich fortdauernd einem stationären Zustande sehr nahe befindet, in dem es beliebig lange Zeit ausdauern könnte. Ein System, welches diesen Bedingungen genügt, wollen wir ein *polycyklisches* nennen. Die Gleichungen (2^d.) reduciren sich für ein solches auf:

$$(3^c.) \qquad P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a},$$

$$(3^b.) \qquad dQ_b = q_b . ds_b,$$

$$(3^a.) \qquad s_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b}.$$

Unter den bisher gemachten Voraussetzungen wird die in den Gleichungen (3.) bis (3^c.) vorkommende Function H immer noch den in (2^c.) angegebenen Werth haben:

$$H = \Phi - L,$$

$$2L = -\Sigma \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right],$$

und L wird eine ganze homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten q_a sein. In letzterer Beziehung aber kann eine Aenderung eintreten, wenn eine oder mehrere der Kräfte, die wir durch den Index c unterscheiden wollen, dauernd gleich Null sind, und wir die entsprechenden

Gleichungen

$$(4.)\qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial p_c},$$

benutzen, um die Grössen p_c zu eliminiren. Bezeichnen wir den Ausdruck für den Werth von H, der durch die Elimination der p_c gewonnen wird, mit $\mathfrak{H}$, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} + \sum_c \left[\frac{\partial H}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial p_a}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b} = \frac{\partial H}{\partial q_b} + \sum_c \left[\frac{\partial H}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial q_b}\right].$$

Wegen der Gleichungen (4.) reducirt sich dies auf

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b} = \frac{\partial H}{\partial q_b}.$$

Es ist also noch immer:

$$(4^a.)\qquad \mathfrak{H} = \Phi - L,$$

$$(4^b.)\qquad P_a = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a},$$

$$(4^c.)\qquad s_b = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_b}.$$

$$(4^d.)\qquad L = \sum [q_b . s_b).$$

Aber dieser Werth von L ist keine ganze homogene Function zweiten Grades mehr von den Grössen q_b, da die Gleichungen (4.) im Allgemeinen Glieder zweiten Grades nach den q_b enthalten, und die Werthe der p_c, die sich daraus ergeben, verwickelte Functionen der q_b sein können, welche bei der Elimination diese Grössen in den Werth des Φ und in die Coefficienten der Glieder zweiten Grades des L eintreten machen. Eben deshalb sind dann auch die s_b keine homogenen linearen Functionen der q_b, wie es vor der Elimination der Fall war.

Ein Beispiel für einen solchen Fall wäre die lebendige Kraft eines Kreisels, an dessen Axe ein Centrifugalregulator befestigt ist, dessen Hebung und Senkung durch keine wechselnde äussere Kraft P_a, sondern nur durch dauernd wirkende conservative Kräfte (Schwere, elastische Federn) beeinflusst wird, und daher als Function der Rotationsgeschwindigkeit dargestellt werden kann. In dem Werthe der lebendigen Kraft, welche gleich dem halben Product aus dem Trägheitsmoment und dem Quadrat der Rotations-

geschwindigkeit ist, wird dann auch das genannte Moment von dieser Geschwindigkeit abhängig.

Da es später nothwendig werden wird, diesen Unterschied zu betonen, so wollen wir das System, in dem alle p_c erhalten sind, das *vollständige,* und das nach Elimination der p_c bleibende das *unvollständige* nennen.

§ 3.

Monocyklische Systeme.

Diesen Namen will ich, wie oben erwähnt, gebrauchen für Systeme, in denen in sich zurücklaufende innere Bewegung vorkommt, die durch nur einen Parameter σ neben den Coordinaten p_a vollständig bestimmt wird.

Der einfachste Fall einer solchen Bewegung ist gegeben, wenn in dem Systeme des § 2 nur eine Geschwindigkeit q vorkommt. Dann erhalten wir die Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} P_a = -\dfrac{\partial H}{\partial p_a}, \\ dQ = s.dq, \\ s = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \\ U = H - q\cdot\dfrac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$dQ = dU + \Sigma[P_a.dp_a] = s.dq.$$

Diese Gleichungen sind vollkommen von gleicher Form, wie die oben aufgestellten für die Wärmebewegung. An Stelle der Temperatur ϑ oder der von ihr abhängigen Grösse η ist die Geschwindigkeit q getreten. Die Grösse dQ bedeutet hier die auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit, wie dort, nur dass diese innere Bewegung jetzt von anderer Art ist als die Wärmebewegung.

Es ist also q hier integrirender Nenner der Gleichung $dQ = 0$; wir können aber, wie dort, die Form der Gleichungen auch wahren, wenn wir als Parameter für die Intensität der Bewegung neben den p_a eine Grösse $\left(q\cdot\dfrac{\partial s}{\partial \sigma}\right)$ einführen, worin σ eine Function von s bedeutet. Dann verliert aber die nunmehr einzuführende Function

$$\mathfrak{H} = U - q\cdot\frac{\partial s}{\partial \sigma}\cdot\sigma$$

die für H in (2^c.) angenommene Bedeutung: $H = \Phi - L$.

Beachtenswerth ist, dass in diesem einfachsten Falle monocyklischer Bewegung auch die lebendige Kraft

$$(5^a.)\qquad L = -\tfrac{1}{2}q\cdot\frac{\partial H}{\partial q} = \tfrac{1}{2}q.s$$

einer der integrirenden Nenner des Systems ist. Wenn man das hierfür zu wählende $\mathfrak{S}$ durch die Gleichung definirt

$$dQ = 2L.d\mathfrak{S} = q.ds,$$

so erhalten wir

$$d\mathfrak{S} = \frac{ds}{s},$$

$$\mathfrak{S} = \log s - \log A,$$

wo A eine Integrationsconstante. Oder:

$$(5^b.)\qquad \mathfrak{S} = \log\left(\frac{s}{A}\right) = \tfrac{1}{2}\log L + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{s}{A^2.q}\right).$$

Hier tritt die Analogie mit der kinetischen Gastheorie schon sehr deutlich heraus. Die Temperatur ϑ ist der lebendigen Kraft proportional, und wenn wir mit $\mathfrak{J}$ das mechanische Wärmeäquivalent, mit v das Volumen der Masseneinheit, mit c und γ die Wärmecapacität für constanten Druck und constantes Volumen bezeichnen, so ist die Entropie der Masseneinheit:

$$S = \mathfrak{J}.\gamma.\log\vartheta + \mathfrak{J}.(c-\gamma).\log v + C.$$

Im vorliegenden Falle ist das Verhältniss $\frac{s}{q}$ das Trägheitsmoment der rotirenden Masse, welches wie das v in der Entropie der Gase von Raumabmessungen abhängt, und zwar nur von solchen, so lange nicht etwa Grössen p_c eliminirt sind.

§ 4.

Ein *allgemeinerer Fall der monocyklischen Bewegung* tritt ein, wenn mehrere Geschwindigkeiten q_b vorhanden sind, die aber alle von einer von ihnen und den Coordinaten p_a bestimmt werden. Aeusserst mannigfache und wechselnde Beziehungen zwischen Drehungsgeschwindigkeiten können bekanntlich auch an mechanischen Apparaten hergestellt werden. Eine Frictionsrolle könnte z. B. auf dem Umfang eines Rotationskörpers laufen, der an verschiedenen Stellen verschiedenen Durchmesser hat, und durch Centrifugalkräfte an der Axe, mit der er sich dreht, auf- und abgeschoben wird.

Wir werden uns eine solche Verbindung im Allgemeinen analytisch darstellen können durch $(n-1)$ Gleichungen zwischen den Grössen p_a und den n Grössen q_b. Wie in andern Theilen der Mechanik, wo feste Verbindungen angenommen werden, denken wir uns die Wirkung dieser festen Verbindung so, dass sie diejenigen Bewegungen, die von selbst unter dem Spiel der einwirkenden Kräfte so verlaufen würden, wie es den Gleichungen der Verbindung entspricht, gar nicht beeinflusst, dass sie aber beginnenden Abweichungen allemal solche Kräfte entgegenstellt, als nöthig sind, die Abweichung zu verhindern. Hierbei wirkt die feste Verbindung immer so, dass die von ihr ausgehenden Kräfte keinen Arbeitsbetrag zu dem der von aussen einwirkenden Kräfte hinzufügen. Durch diese letztere Bedingung ist die Grösse der Kräfte, die sie in jedem Zustand des Systems ausüben, vollständig bestimmt.

Wenden wir dies an auf unser zusammengesetzteres monocyklisches System, so werden wir die allgemeinste Form der Abhängigkeit der Geschwindigkeiten q_b von einander so darstellen können, dass wir jede einzelne derselben als Function der p_a und irgend einer neu einzuführenden Variablen x ausdrücken.

Da die s_b vermöge des Gleichungssystems

$$s_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b}$$

als Functionen der p_a und der q_b dargestellt werden können, so lassen sie sich ebenfalls als Functionen der p_a und des x ausdrücken. Wir wollen das System nach der Einführung der besprochenen festen Verbindungen kurzweg als *das gefesselte System* bezeichnen.

Unter den von uns gemachten Annahmen, die das Problem als ein statisches charakterisiren, folgt, dass die Kräfte P_a dauernd wirken, auch während das System seinen Zustand nicht ändert; im Gegentheil vernachlässigen wir die Aenderungen der P_a, die von der Geschwindigkeit der Zustandsänderungen abhängen. Die Arbeitswerthe dQ_b dagegen treten nur ein, so lange solche Zustandsänderungen währen. Da beide Arten von Einwirkungen also ganz verschiedenen, von einander unabhängigen Zeitperioden entsprechen, so können Kräfte P, welche durch die feste Verbindung gegeben werden, und die wir zur Unterscheidung mit P' bezeichnen wollen, auch niemals den in den dQ'_b arbeitenden Kräften das Gleichgewicht halten, und umgekehrt; sondern es müssen die Kräfte jeder Klasse für sich im Gleichgewicht sein.

Daraus folgt also *erstens* für die gesammte Arbeit der Kräfte P'_a:

$$\Sigma[P'_a . dp_a] = 0.$$

Da die dp_a vollkommen willkürlich bleiben müssen, wenn durch die eingetretene feste Verbindung keiner von den Graden der Bewegungsfreiheit verloren gehen soll, so müssen in diesem Falle alle $P'_a = 0$ sein, also auch in dem gefesselten System die Kräfte P_a ihren früheren Werth behalten:

$$(6.)\qquad P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a}.$$

Andererseits muss die auf Beschleunigung der Bewegung des gefesselten Systems verwendete Arbeit dQ gleich der Summe der im ungefesselten bei den gleichen Geschwindigkeitsänderungen verwendeten Arbeit sein, also

$$(6^a.)\qquad dQ = \sum_b [q_b . ds_b].$$

Wenn wir die s_b als Functionen der p_a und des x betrachten, so wird diese Gleichung:

$$(6^b.)\qquad dQ = \sum_a \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial s_b}{\partial p_a} dp_a\right] + \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial s_b}{\partial x}\right] dx.$$

Wenn wir mit U die gesammte innere Energie des Systems bezeichnen, ist

$$dU = dQ - \Sigma[P_a . dp_a].$$

U ist ursprünglich gegeben als Function der p_a und q_b; werden die letzteren durch die p_a und durch x ausgedrückt, so ergiebt die Gleichung

$$dQ = 0$$

die Form

$$\sum_a \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p_a} + P_a\right) dp_a\right] + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx = 0,$$

deren Integral wir schreiben können:

$$\sigma = \text{Const.},$$

worin σ eine Function der p_a und des x sein muss. Dann ergiebt sich, wie oben am Ende von § 1:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p_a} + P_a\right) = \lambda \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial p_a},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Folglich bekommt die Gleichung (6^b.) die Form:

$$(6^c.)\qquad dQ = \lambda . d\sigma.$$

Wir können somit die Function σ als die Entropie des gefesselten Systems bezeichnen. Statt derselben könnten, wie oben erwähnt, auch beliebige Functionen von σ gewählt werden.

Bisher ist die Wahl der Function x vollkommen willkürlich gewesen. Nehmen wir für sie eines dieser σ, so wird in (6^b.)

$$dQ = \lambda . d\sigma$$

zu setzen sein, und (6^b.) zerfällt dann in die Reihe der Gleichungen

$$(6^d.)\quad \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0,$$

$$(6^e.)\quad \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} \right] = \lambda.$$

Die Gleichungen (6^d.) sind nach den $q_{\mathfrak{b}}$ lineare homogene Gleichungen. Nehmen wir an, dass die Anzahl der darin enthaltenen $p_{\mathfrak{a}}$ durch passende Wahl derselben auf ihr kleinstes Maass zurückgeführt sei. Es könnte nämlich vorkommen, dass n von den Grössen $p_{\mathfrak{a}}$ nur in der Form von weniger als n Functionen derselben in die Werthe der $s_{\mathfrak{b}}$ eintreten. Dann würde man diese Functionen an Stelle einer gleichen Anzahl der $p_{\mathfrak{a}}$ einführen können. Ist nach dieser Reduction *die Anzahl* $\mathfrak{A}$ *der Indices* $\mathfrak{a}$ *gleich der Anzahl* $\mathfrak{B}$ *der Indices* $\mathfrak{b}$, so ist die Functionaldeterminante der $s_{\mathfrak{b}}$ nach den Variablen $p_{\mathfrak{a}}$ gleich Null zu setzen, d. h. es muss eine Gleichung bestehen zwischen den $s_{\mathfrak{a}}$, deren Coefficienten unabhängig sind von den in den Gleichungen (6^d.) noch vorkommenden $p_{\mathfrak{a}}$, wohl aber von dem σ abhängen können. Schreiben wir diese:

$$(6^f.)\quad F = \sigma,$$

worin F eine Function allein der $s_{\mathfrak{b}}$, eventuell auch der in den Werthen der $s_{\mathfrak{b}}$ nicht vorkommenden p ist. Diese Gleichung muss identisch werden, wenn statt der $s_{\mathfrak{b}}$ ihre Werthe ausgedrückt durch die $p_{\mathfrak{a}}$ und σ gesetzt werden. Daher ergiebt die Differentiation derselben nach den $p_{\mathfrak{a}}$ und σ

$$(6^g.)\quad \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0,$$

$$(6^h.)\quad \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} \right] = 1.$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (6^d.) und (6^e.), so ergiebt sich:

$$(6^i.)\quad q_{\mathfrak{b}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}}.$$

Wird F als Function der $s_{\mathfrak{b}}$ willkürlich gewählt, so ergeben die Glei-

chungen (6^i.), da die $q_\mathfrak{b}$ als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und $s_\mathfrak{b}$ ausgedrückt werden können, wie oben bemerkt, zunächst $\mathfrak{B}$ Gleichungen zur Bestimmung der $s_\mathfrak{b}$ durch $p_\mathfrak{a}$ und λ, welche, wenn sie unabhängig von einander sind, die Wirkung der festen Verbindung vollständig definiren. Endlich bestimmt die Gleichung (6^l.) das σ als Function der $s_\mathfrak{b}$, beziehlich der $p_\mathfrak{a}$ und des λ, oder auch das λ als Function der $p_\mathfrak{a}$ und des σ.

Aber auch für $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ gilt dieselbe Form der Lösung. Zunächst ist es leicht, sich davon zu überzeugen, dass in beiden Fällen die Gleichungen (6^l.) und (6^i.) wirklich Lösungen für das System der Gleichungen (6^d.) und (6^e.) sind, und, wenn unabhängig von einander, mit Hülfe der Gleichungen, welche die $q_\mathfrak{b}$ als Functionen der $s_\mathfrak{b}$ geben, nämlich

$$(6^k.) \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} = -s_\mathfrak{b},$$

Werthe der $s_\mathfrak{b}$ ergeben, die allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aber man kann auch nachweisen, dass diese Form der Lösung den nöthigen Grad von Allgemeinheit hat*), namentlich auch in dem Falle, wo $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, und die Anzahl der Gleichungen (6^d.) also kleiner ist, als die Anzahl der Grössen $s_\mathfrak{b}$, welche bestimmt werden sollen. Ersetzt man nämlich in den Gleichungen (6^d.) die $q_\mathfrak{b}$ durch ihre Werthe, die mittels der Gleichungen (6^k.) in den $s_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$ ausgedrückt sind, so enthalten die Gleichungen (6^d.) nur noch die Grössen $s_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$. Diese Gleichungen erlauben, dass man für bestimmte Werthe der $p_\mathfrak{a}$ beliebige Werthe der $s_\mathfrak{b}$ nimmt, ferner beliebige Werthe ihrer sämmtlichen ersten Differentialquotienten bis auf die eines der s, welches wir mit s_1 bezeichnen wollen. Dann aber sind durch die Gleichungen (6^d.) die Differentialquotienten des s_1 nach den $p_\mathfrak{a}$ vollständig bestimmt, nicht aber $\frac{\partial s_1}{\partial \sigma}$. So lange also das σ constant gehalten wird, ist durch jene Differentialgleichungen durchaus freigelassen, wie die übrigen $s_\mathfrak{b}$ mit steigenden $p_\mathfrak{a}$ wachsen sollen, mit Ausnahme des s_1. Wie das s_1 aber wachsen muss, ist dann vollständig gegeben. Genau dieselbe Freiheit beziehlich Gebundenheit der genannten Functionen wird dargestellt durch die Integralgleichung

$$(6^l.) \qquad F = \sigma,$$

*) Dieses Problem ist vollständiger mit Berücksichtigung der Fälle, wo die Gleichungen (6^i.) nicht unabhängig sind, in dem folgenden Aufsatze von Herrn *L. Kronecker* behandelt.

wenn das F eine beliebig zu wählende Function der sämmtlichen $s_\mathfrak{b}$ ist, und es ist also die gegebene Lösung in jedem Falle ausreichend allgemein.

Die angegebene Lösung des Problems genügt demnach, wenn die Gleichungen (6^f.) nicht abhängig von einander werden, den Forderungen der Aufgabe; den genannten Ausnahmefall behalte ich späterer Behandlung vor. Es sind dadurch die sämmtlichen Grössen $q_\mathfrak{b}$, $s_\mathfrak{b}$, λ darstellbar als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und des σ, ebenso auch die ursprünglich in dem ungefesselten Zustande des Systems als Functionen entweder der $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$, beziehlich der $p_\mathfrak{a}$ und $s_\mathfrak{b}$ gegebenen Werthe der $P_\mathfrak{a}$ und des U, sowie des H.

Im ungefesselten System können wir, wie schon in § 1 nach *Gibbs* bemerkt ist, die Gleichung der Constanz der Energie schreiben:

$$dU = \sum_\mathfrak{b}[q_\mathfrak{b} . ds_\mathfrak{b}] - \Sigma[P_\mathfrak{a} . dp_\mathfrak{a}]$$

und das U wie die $q_\mathfrak{b}$ und $P_\mathfrak{a}$ als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und $s_\mathfrak{b}$ darstellen. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} = -P_\mathfrak{a},$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_\mathfrak{b}} = q_\mathfrak{b}.$$

Wenn nach erfolgter Fesselung des Systems die $s_\mathfrak{b}$ in U durch ihre Werthe in $p_\mathfrak{a}$ und σ ersetzt worden sind, wollen wir die Function U mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} + \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial U}{\partial s_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right],$$

$$\sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial U}{\partial s_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right] = \sum_\mathfrak{b}\left[q_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right] = 0$$

nach (6^d.), folglich

$$P_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_\mathfrak{a}}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \sigma} = \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial U}{\partial s_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial \sigma}\right] = \sum_\mathfrak{b}\left[q_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial \sigma}\right];$$

also nach (6^e.)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \sigma} = \lambda.$$

Daraus ergiebt sich also für das gefesselte System die Form

$$dU = \lambda . d\sigma - \sum_\mathfrak{a}[P_\mathfrak{a} . dp_\mathfrak{a}],$$

beziehlich, wenn wir

$$(6^{n}.)\qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{U} - \lambda . \sigma$$

setzen und die p_a und λ zu unabhängigen Variablen machen:

$$d\mathfrak{H} = -\sigma . d\lambda - \sum_a [P_a . dp_a].$$

Also

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_a} = -P_a,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \lambda} = -\sigma,$$

übereinstimmend mit den im vorigen Paragraphen gegebenen Formen für das einfache monocyklische System. Nur findet sich unter den verschiedenen Functionen von σ nicht nothwendig eine vor, die die ausgezeichnete Beziehung wie das s der Gleichung (5^{c}.) zur lebendigen Kraft hätte, und deren zugeordnetes λ gleich der lebendigen Kraft wäre. Unter welchen Bedingungen dies eintritt, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden.

§ 5.

Bedingungen, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist.

Wir haben in § 3 gefunden, dass für die einfachen monocyklischen Systeme die lebendige Kraft immer einer der integrirenden Nenner ist. Es fragt sich, ob und unter welchen Bedingungen dies auch für die Systeme mit festen Verbindungen der bewegten Theile der Fall ist, die wir in § 4 besprochen haben. Diese Frage ist auch für die Analogie mit der Wärmetheorie wichtig, da in dieser die Temperatur, die den integrirenden Nenner bildet, nach der kinetischen Gastheorie in der That der lebendigen Kraft der inneren Bewegung proportional ist, und die von den Herren *Boltzmann* *) und *Clausius* **) aufgestellte Hypothese, wonach dies auch in allen andern Körpern der Fall sei, mindestens einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Die lebendige Kraft L des Systems, sei es gefesselt oder ungefesselt, ist nach (4^{d}.) gegeben durch die Gleichung

$$(7.)\qquad 2L = \sum_b [q_b . s_b].$$

Da statt des Werthes σ der im vorigen Paragraphen gefundenen Entropie

*) Wiener Sitzungsber. 1866 Bd. LIII, Abth. II S. 195—220.

**) *Poggendorff* Annalen, 1871, Bd. 142, S. 433—461, § 14 u. 15 der Abhandlung.

auch jede Function von σ eintreten kann, so wollen wir die zu $2L$ als integrirendem Nenner gehörige Entropie mit $\log \sigma$ bezeichnen. Also

$$(7^a.) \quad dQ = 2L \cdot \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad = \lambda . d\sigma,$$

daher ist in diesem Falle

$$(7^b.) \quad 2L = \lambda . \sigma.$$

Wenn wir in Gleichung (7.) die der festen Verbindung entsprechenden Werthe der $q_\mathfrak{b}$ aus (6'.) setzen, erhalten wir

$$(7^c.) \quad 2L = \lambda . \Sigma \left[s_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_\mathfrak{b}} \right]$$

und (7^b.) kann wegen der Gleichung (6'.)

$$F = \sigma$$

geschrieben werden

$$2L = \lambda . F.$$

Die Bedingung dafür, dass die lebendige Kraft integrirender Nenner sei, ist demnach die, dass

$$F = \sum_\mathfrak{b} \left[s_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_\mathfrak{b}} \right],$$

d. h. dass die Function F, die den Werth der Entropie des gefesselten Systems giebt, *eine homogene Function ersten Grades* der Bewegungsmomente $s_\mathfrak{b}$ des ungefesselten Systems sei. Nach den oben in (7.) und (7^a.) gemachten Festsetzungen stehen in dem gefesselten System die Grössen λ und σ zu L und dQ genau in demselben Verhältniss, wie in dem einfachen monocyklischen Systeme des § 3 die Grössen q und σ. Wir können also passend λ als *die resultirende Geschwindigkeit der inneren Bewegung* und σ als *das dazu gehörige resultirende Bewegungsmoment* bezeichnen. Beide sind durch die gegebenen Ableitungen bis auf einen constanten Factor bestimmt; denn alle Gleichungen dieses Paragraphen bleiben unverändert, wenn wir $(n\sigma)$ statt σ und gleichzeitig $\frac{\lambda}{n}$ statt λ setzen. Da ein solcher constanter Factor eine beliebige Art physikalischer Benennung erhalten kann, so wird dadurch auch die dem σ zu gebende Einheit willkürlich bestimmbar; ist sie bestimmt, so wird die des λ dadurch mitbestimmt, da das Product $\lambda . \sigma$ eine lebendige Kraft, d. h. ein Arbeitsquantum bezeichnet. Es wird am zweckmässigsten im Sinne der vorgeschlagenen Bezeichnung beider Grössen sein, λ als eine

Geschwindigkeit, d. h. den Differentialquotienten einer Raumgrösse nach der Zeit, und σ als ein Bewegungsmoment (Masse mal Raumgrösse, mal Geschwindigkeit) aufzufassen. Da die Function F eine homogene Function ersten Grades und

$$\frac{1}{\sigma}\cdot F = 1$$

ist, so wird sich diese letztere Function als eine solche von den Grössen $\left(\frac{1}{\sigma}\cdot s_{\mathfrak{b}}\right)$ darstellen lassen, welche nach dem vorher Gesagten reine Raumgrössen sind, und die constanten Coefficienten, welche in der Function F enthalten sind, werden also auch nur reine Raumgrössen zu sein brauchen.

Was die Grössen $q_{\mathfrak{b}}$ betrifft, so sind dieselben vermittels der Gleichungen:

$$(3^a.)\qquad s_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}},$$

beziehlich nach Elimination einiger $p_{\mathfrak{c}}$:

$$(4^c.)\qquad s_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}},$$

auszudrücken als Functionen der $s_{\mathfrak{b}}$. Im ersteren Falle sind die $s_{\mathfrak{b}}$ lineare homogene Functionen der $q_{\mathfrak{b}}$, im zweiten Falle sind sie im Allgemeinen nicht linear und nicht homogen. Schreibt man die Gleichungen ($6^f.$) und ($6^i.$)

$$(7^h.)\qquad \begin{cases} \dfrac{q_{\mathfrak{b}}}{\sigma} = \dfrac{\lambda}{\sigma}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}}, \\ \dfrac{1}{\sigma}\cdot F = 1, \end{cases}$$

so sind bei vollständiger Bewahrung der $p_{\mathfrak{a}}$ die Grössen $\frac{1}{\sigma}\cdot q_{\mathfrak{b}}$ lineare Functionen der $\frac{s_{\mathfrak{b}}}{\sigma}$ mit Coefficienten, die von den Parametern $p_{\mathfrak{a}}$ abhängen. Dann kommen also als Unbekannte in dem System der $(\mathfrak{B}+1)$ Gleichungen ($7^h.$) nur die $(\mathfrak{B}+1)$ Grössen $\frac{1}{\sigma}\cdot s_{\mathfrak{b}}$ und $\frac{1}{\sigma}\cdot\lambda$ vor, welche durch Auflösung dieser Gleichungen als Functionen der Parameter $p_{\mathfrak{a}}$ zu finden sind. Daraus ergiebt sich, dass, *wenn das vollständige System der Parameter $p_{\mathfrak{a}}$ constant erhalten wird, die sämmtlichen Bewegungsmomente $s_{\mathfrak{b}}$, und demgemäss auch die sämmtlichen Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{b}}$ des nach den Voraussetzungen dieses Paragraphen gefesselten Systems proportional dem Werthe von σ, so wie dem der resultirenden Geschwindigkeit λ wachsen müssen.*

Dies ist im Allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn eine Anzahl

der Parameter p_{c} eliminirt ist, weil dann die gestellte Bedingung, Constanthaltung sämmtlicher Parameter, nicht mehr erfüllt werden kann, da dazu nöthige Kräfte P_{c} fehlen. In der That sind dann die q_{b} nicht mehr lineare Functionen der s_{b}, und die Grösse σ bleibt in den Gleichungen erhalten, wenn man die Grössen s_{b} auf die Form $\frac{1}{\sigma}\cdot s_{b}$ zu bringen sucht.

Die Darstellungsweise der Mechanik eines solchen Systems ist nicht bloss in dem Sinne, wie es am Schluss des vorigen Paragraphen für das allgemeinere gefesselte System nachgewiesen wurde, vollkommen analog der des einfachen monocyklischen Systems zu geben, sondern es kommt hinzu, dass auch die lebendige Kraft in denselben Beziehungen zu den Parametern λ und σ steht, wie im einfachen System zu dem q und s. Es ist also auch

$$H+\tfrac{1}{2}.\lambda.\sigma = \Phi$$

die potentielle Energie des Systems.

Aber in einer Beziehung ist eine wesentliche Verallgemeinerung eingetreten. Das q des einfachen monocyklischen Systems ist der Differentialquotient nach der Zeit von einer Raumgrösse, welche die augenblickliche Lage der in stationärer Bewegung begriffenen Theile bestimmt, und das nach der Zeit genommene Integral von q ergiebt also die Differenz zwischen Anfangs- und Endwerth dieser Raumgrösse unabhängig von den inzwischen durchlaufenen Zuständen des Systems. Im vorliegenden verallgemeinerten System ist dies nicht mehr der Fall, und eine Raumgrösse, deren Differentialquotient nach der Zeit die Grösse λ wäre, besteht nicht mehr.

Es lässt sich schliesslich die besondere Art der festen Verbindungen zwischen den bewegten Theilen des Systems, welche in diesem Paragraphen angenommen ist, noch näher charakterisiren. Es ist schon vorher auseinandergesetzt worden, dass die die Verbindung charakterisirende Gleichung:

$$\frac{F}{\sigma} = 1$$

hier voraussetzt, dass das F eine homogene Function ersten Grades von den Grössen s_{b} sei, und dass eben deshalb die constanten Coefficienten dieser Gleichung nur Raumgrössen werden zu sein brauchen, ohne Massen und Zeitgrössen zu enthalten. Die ganze Art der Verbindung ist aber, wie die obige Entwickelung gezeigt hat, von der Function F und also auch von ihren Constanten abhängig. Nur diese treten in die Werthe der s_{b} und q_{b} als bestimmend für die Verbindungsweise ein.

Anders ist es in dem allgemeineren Falle des § 4, wenn F keine homogene Function ersten Grades der Grössen s_b ist. In diesem Falle können die Differentiale der Zeit aus der Grösse $\frac{1}{\sigma}\cdot F$, welche der Einzahl gleich werden soll, nur verschwinden, wenn Zeitgrössen auch in den nach absolutem Maass gemessenen Constanten vorkommen. Die Zeit selbst kann nicht eintreten, da die Gleichung von der Zeit unabhängig sein soll, wohl aber Differentialquotienten nach der Zeit wie Geschwindigkeiten und Kräfte. Diese aber müssten thatsächlich in dem Systeme bestehen, um mechanisch wirksam sein zu können. Constante Geschwindigkeiten würden nur von aussen her constant erhalten werden können, und würden also mit der vorausgesetzten Unabhängigkeit des Systems und seinem monocyklischen Charakter collidiren. Wohl aber könnten Kräfte, welche ja dt^2 im Nenner haben, als Constanten eintretend, die Zeit wegheben. Solche Kräfte können keine äusseren Kräfte sein, weil diese im vollständigen System alle als veränderlich vorausgesetzt werden müssen. Dagegen könnten Constanten, welche die Wirksamkeit innerer Kräfte bestimmen, wie die Constante a^2 in der Gleichung der elastischen Kraft

$$X = -a^2.x,$$

möglicherweise eintreten; wenigstens wäre, so weit ich sehe, von mathematischer Seite nichts dagegen einzuwenden. Die bisher erfundenen mechanischen Hülfsmittel zu dauernder Bewegungsübertragung, wie unendliche Schnüre, Zahnräder, Frictionsrollen geben immer nur Verhältnisse der Geschwindigkeiten, die von der Grösse der Geschwindigkeit unabhängig sind, wohl aber von der Stellung der Theile abhängig sein können; letzteres z B. bei Frictionsrollen, die den Winkel ihrer Axen oder auch die Linie, an der sie laufen, ändern können. Beispiele der letzteren Art kommen z. B. in den Integrirmaschinen vor. Ich schlage deshalb vor, die Verbindungen der genannten Art, welche die Gleichung $F = \sigma$ nach den s_b und σ homogen machen, und demgemäss die lebendige Kraft als integrirenden Factor bestehen lassen, als ***rein kinematische Verbindungen*** zu unterscheiden. So lange nur solche eingeführt werden, bleibt die lebendige Kraft einer der integrirenden Nenner des gefesselten Systems *).

Beispiele der allgemeineren Form der Verbindung, in welcher bei

*) Eine weitere Verallgemeinerung dieser Sätze habe ich seitdem gefunden, und hoffe sie nächstens zu veröffentlichen.

unveränderter Lage aller bewegten Theile das Verhältniss zwischen den verschiedenen Geschwindigkeiten von deren Grösse abhängig wäre, weiss ich nicht zu finden. Auch die kinetische Gastheorie giebt Beziehungen zwischen den gleichzeitig bestehenden Bewegungen verschiedener Theile des Systems, welche sich unter das Gesetz der rein kinematischen Verbindungen fügen.

§ 6.

Koppelung je zweier Systeme.

Wenn zwei ursprünglich von einander unabhängige monocyklische Systeme durch passende Regulirung der äusseren Kräfte P_a in einen Zustand versetzt werden, der den Bedingungen einer bestimmten Art fester Verbindung nach den Forderungen des § 4 entspricht, so kann man eine solche feste Verbindung zwischen ihnen eintreten lassen, ohne dadurch übrigens die vorhandene Bewegung zu stören, und sie von da ab bei eintretenden neuen Veränderungen der Kräfte P_a unter Einhaltung dieser festen Verbindung sich weiter bewegen lassen. Ich will diesen Zustand zeitweiliger fester Verbindung als *Koppelung* der Systeme bezeichnen. Ein analoger Vorgang kommt bei der Wärmebewegung vor, indem zwei Körper gleicher Temperatur ohne Veränderung ihrer inneren Bewegung in leitende Berührung gesetzt werden können, so dass sie bei neuen hinreichend langsamen Veränderungen gleiche Temperatur behalten.

Dabei würde es vorkommen können, dass die beiden Systeme in der Lage, die ihnen behufs der Koppelung gegeben ist, auch noch mit Druck- oder Fernkräften auf einander wirkten. Wir wollen zunächst voraussetzen, dass Kräfte dieser Art, wo sie vorkommen, vollkommen bekannt seien und den willkürlich veränderlichen Kräften P_a zugerechnet werden. Die Koppelung, welche wir als solche bezeichnen, würde also nur Arbeitsgrössen dQ vom einen auf das andre System zu übertragen haben. Wir können eine solche als *reine Bewegungskoppelung* bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung können wir die Koppelung der Systeme als eine der festen Verbindungen betrachten, deren Gesetze wir in den letzten beiden Paragraphen erörtert haben. Die beiden Körper ohne die Koppelung sind ein dicyklisches System, welches durch die Koppelung in ein monocyklisches verwandelt wird.

Wir treffen hier wieder auf ganz analoge Verhältnisse in der Wärmelehre. Werden zwei gleich temperirte Körper in wärmeleitenden Contact

gesetzt, so behalten sie von da ab, wenigstens bei genügend langsam eintretenden Veränderungen, gleiche Temperatur, indem die Verbindung Austausch ihrer inneren Bewegung bewirkt. Daneben können sie auch durch Druck und Anziehungskräfte auf einander wirken, aber diese halten sich unter sich und mit den übrigen äusseren Kräften im Gleichgewicht, ungestört durch den gleichzeitigen Austausch der Temperatur. Auch ist keine der Kräfte P_a, mit welcher jeder Körper nach aussen wirkt, durch den Umstand verändert, dass der Eintritt jeder Aenderung seines Volumens oder molecularen Gefüges jetzt andre Wärmevorräthe aus dem andern Körper eintreten oder zu ihm austreten lässt, als dies ohne die Verbindung der Fall sein würde. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied in dem Verhalten der actuellen und potentiellen Energie. Falls eine Zustandsänderung eines der Körper den Uebertritt potentieller Energie aus dem andern Körper veranlasste, würden die Kräfte nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten verändert sein. Die Wärme bewahrt in dieser Beziehung durchaus den Charakter actueller Energie, wie er in unseren Sätzen der §§ 4 und 5 entwickelt ist.

Von Interesse ist hier namentlich der Fall, wo zwischen zwei Systemen, welche gleiche Werthe eines ihrer integrirenden Nenner haben, eine mechanische Verbindung so hergestellt wird, dass, während diese Verbindung besteht, die Gleichheit der genannten Nenner erhalten bleiben muss. Um eine solche Art der Verbindung kurz zu bezeichnen, will ich sie *isomore Koppelung* (*ἴσον μόριον,* gleicher Nenner) nennen. Der Contact zweier gleichtemperirter Körper ist ein Fall dieser Art, da die Temperatur integrirender Nenner der beiden Körper ist. Andre Beispiele wären zwei Kreisel, deren Axen so verbunden werden, dass sie gleiche Umlaufsgeschwindigkeit einhalten müssen. Ist gleiche Rotation schon beim Eingehen der Verbindung vorhanden, so lässt sich die Koppelung ohne Störung der vorhandenen Bewegungen herstellen. Ihre Axen könnten Centrifugalregulatoren verschiedener Art tragen, deren Stellung von der Axe aus durch Kräfte P_a regulirt würde, wodurch mittelbar auch die Umlaufsgeschwindigkeit auf beliebige Höhe zu bringen wäre.

Auch zwei Ströme in ringförmigen Röhren können ohne Störung beider in einen Ring vereinigt werden, wenn beide gleiche Strömung durch jeden Querschnitt haben. Streckung des Canals vermindert die Strömung, Verkürzung erhöht sie. Dadurch kann man je zweien gleichen Werth geben.

Dann gelten genau dieselben Betrachtungen, welche für die Wärmebewegung aus den Gleichungen (1.) folgen, und an die ich in § 1 kurz erinnert habe. Wir erhalten dadurch genau dieselben Gesetze für die Möglichkeit, auf reversible Weise Arbeit der Kräfte P_a auf Kosten der inneren Bewegung der Systeme zu gewinnen. Die Grundvoraussetzung hierfür ist also die, dass wir kein anderes Mittel haben, direct auf die innere Bewegung der gegebenen monocyklischen Systeme zu wirken, als durch isomore Koppelung mit anderen Systemen, und dass für jedes einzelne der koppelbaren Systeme ein einziger bestimmter integrirender Nenner besteht, welcher die ungestörte Koppelung mit dem gleich grossen Nenner eines andern Systems zulässt, wie dies in den oben angeführten Beispielen von Centrifugalregulatoren oder Ringströmen der Fall sein würde.

Dass wir die Wärmebewegung der Atome nicht directer angreifen und verwandeln können, als es der Fall ist, hängt doch auch nur davon ab, dass wir unsere Einwirkungen nicht auf bestimmte, in bestimmter Richtung vorgehende Atome isoliren können, sondern nothwendig immer alle eines bestimmten Raumbezirks gleichmässig treffen müssen. Es beruht nur auf der Beschränkung der uns zu Gebot stehenden Methoden, und nicht im Wesen der Bewegung. Eben deshalb dürfen wir ähnliche Beschränkungen unseres Eingreifens auch für die hier besprochenen analogen Fälle voraussetzen, ohne die Natur des Problems zu verändern.

Wenn wir, wie am Ende des vorigen Paragraphen, rein kinematische Verbindung beider Systeme voraussetzen, so dass die lebendige Kraft des gekoppelten Systems zu einem der integrirenden Nenner dieses Systems wird, so folgt in Bezug auf die möglichen Arten der Koppelung weiter noch Folgendes: Es seien $\eta_1 = \eta$ und $\eta_2 = \eta$ die beiden integrirenden Nenner beider Systeme, welche durch die Koppelung gleich gemacht werden, σ_1 und σ_2 seien die dazu gehörigen Entropien, so ist

$$(8.)\quad \begin{cases} dQ_1 = \eta . d\sigma_1, \\ dQ_2 = \eta . d\sigma_2, \\ dQ = dQ_1 + dQ_2 = \eta . d(\sigma_1 + \sigma_2). \end{cases}$$

Es ist also η auch ein integrirender Nenner des gekoppelten Systems. Unter diesen Umständen sind die lebendigen Kräfte, da sie auch integrirende Nenner der betreffenden Systeme sind, von der Form:

$$L_1 = \eta.\Phi_{\sigma_1},$$
$$L_2 = \eta.\Psi_{\sigma_2},$$
$$L_1+L_2 = \eta.X_{(\sigma_1+\sigma_2)};$$

also

$$(8^a.) \quad X_{(\sigma_1+\sigma_2)} = \Phi_{\sigma_1}+\Psi_{\sigma_2}.$$

Diese letzte Gleichung nach einander nach σ_1 und σ_2 differentiirt, giebt:

$$X'' = 0.$$

Also ist X eine lineare Function von $(\sigma_1+\sigma_2)$, und von der Form

$$(8^b.) \quad \begin{cases} X = a+b+c(\sigma_1+\sigma_2), \\ \Phi = a+c.\sigma_1, \\ \Psi = b+c.\sigma_2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun mit s_1 und s_2 die resultirenden Bewegungsmomente beider Systeme, wie sie in dem ursprünglichen Probleme vorkommen, so ist

$$dQ_1 = 2L_1\cdot\frac{ds_1}{s_1} = \eta.d\sigma_1,$$
$$dQ_2 = 2L_2\cdot\frac{ds_2}{s_2} = \eta.d\sigma_2.$$

Also

$$(8^c.) \quad \begin{cases} 2\frac{ds_1}{s_1} = \frac{d\sigma_1}{\Phi_{\sigma_1}} = \frac{d\sigma_1}{a+c\sigma_1}, \\ 2\frac{ds_2}{s_2} = \frac{d\sigma_2}{\Psi_{\sigma_2}} = \frac{d\sigma_2}{b+c\sigma_2}. \end{cases}$$

Dies giebt integrirt, da σ_1 eine Function nur von s_1, σ_2 nur von s_2 ist:

$$(8^d.) \quad \begin{cases} \log(s_1^{2c}) = \log(a+c\sigma_1)+\log(\alpha^{2c}), \\ \log(s_2^{2c}) = \log(b+c\sigma_2)+\log(\beta^{2c}), \end{cases}$$

wo α und β Integrationsconstanten bezeichnen. Oder

$$(8^e.) \quad \begin{cases} \Phi_{\sigma_1} = a+c\sigma_1 = \left(\frac{s_1}{\alpha}\right)^{2c}, \\ \Psi_{\sigma_2} = b+c\sigma_2 = \left(\frac{s_2}{\beta}\right)^{2c}, \end{cases}$$

und

$$(8^f.) \quad \begin{cases} \eta_1 = L_1\cdot\left(\frac{\alpha}{s_1}\right)^{2c}, \\ \eta_2 = L_2\cdot\left(\frac{\beta}{s_2}\right)^{2c}. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass rein kinematische Koppelung isomor nur ausgeführt werden kann, indem solche integrirende Nenner gleich gesetzt werden, die das Product aus der lebendigen Kraft, einer beliebigen Constanten und einer

Potenz des resultirenden Bewegungsmomentes sind, welche Potenz auf beiden Seiten denselben Exponenten hat.

In den obigen Beispielen, Koppelung der Rotationsaxen von Kreiseln, und der ringförmigen Ströme ist

$$q = \frac{2L}{s}.$$

In der kinetischen Gastheorie ist ϑ dem L selbst proportional.

§ 7.

Gleichgewicht der inneren Bewegung für drei monocyklische Systeme.

Wir haben schliesslich noch das Analogon zu suchen für diejenige charakteristische Eigenschaft der Wärmebewegung, welche es möglich macht, von der Temperatur eines Körpers als einer Grösse zu reden, und die sich in dem Satze zusammenfasst: ***Wenn jeder einzelne von zwei Körpern mit demselben dritten im Wärmegleichgewicht ist, sind sie mit einander in Wärmegleichgewicht.***

Die entsprechende Bedingung für drei monocyklische Systeme kann so formulirt werden: Es wird verlangt, dass die Koppelungsgleichung zwischen (2.) und (3.) erfüllt sei, so oft sie zwischen (1.) und (2.) einerseits, so wie zwischen (1.) und (3.) andrerseits erfüllt ist.

Daraus folgt, wie analytisch unschwer nachzuweisen ist, dass die Koppelungs-Gleichungen sich auf die Form bringen lassen müssen:

$$(9.) \qquad \varphi_1 = \psi_2 = \chi_3,$$

wo φ_1 eine Function der Parameter des ersten Systems ist, ψ_2 eine solche des zweiten, χ_3 des dritten. Es würden diese drei Grössen also das Analogon der Temperatur für die monocyklischen Systeme darstellen.

Von den früher angeführten Beispielen fallen unter die hier aufgestellte Bedingung die Kreisel mit gleicher Rotationsgeschwindigkeit ihrer zu koppelnden Axen, und die Ströme in ringförmigen Canälen, deren Strömung durch den Querschnitt übereinstimmend sein muss.

Unter diesen Umständen müssen die allgemeinen Koppelungs-Gleichungen (6'.) von der Form (9.) sein, d. h. die beiden gleichwerthigen Ausdrücke

$$(9^a.) \qquad \left\{ \frac{q_1}{\frac{\partial F}{\partial s_1}} = \frac{q_2}{\frac{\partial F}{\partial s_2}} \right.$$

können s_1 und s_2 gleichzeitig auf beiden Seiten nur in einem gemeinsamen Factor enthalten, der wegzuheben ist, und zwar muss dieser Factor in den Differentialquotienten von F stecken, da q_1 nur Parameter des ersten und q_2 nur solche des zweiten Körpers enthält. Also muss sein:

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial s_1} = \varphi_{s_1} \cdot \chi, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s_2} = \psi_{s_2} \cdot \chi, \end{cases}$$

worin χ Function von s_1 und s_2 ist. Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1 . \partial s_2} = \varphi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} = \psi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1}.$$

Vergleichung der letzten Gleichung mit (10.) zeigt, dass

$$(10^a.)\quad \frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} - \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1} = 0,$$

d. h. dass χ eine Function nur von F ist. Schreiben wir:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{dX}{dF},$$

$$\varphi = \frac{d\Phi}{ds_1},$$

$$\psi = \frac{d\Psi}{ds_2},$$

so ergeben die Gleichungen (10.) das Integral:

$$(10^b.)\quad X = \Phi_{s_1} + \Psi_{s_2} + C.$$

Da der Werth von F gleich dem der Entropie σ des vereinigten Systems sein muss, so kann nun X als Function von σ angesehen werden.

Andererseits wird die Koppelungs-Gleichung (9^a.) nun

$$(10^c.)\quad \frac{q_1}{\varphi_{s_1}} = \frac{q_2}{\psi_{s_2}}.$$

Wenn, wie wir vorausgesetzt haben, q_1 ein integrirender Nenner für das erste, q_2 für das zweite System ist, so ist auch jedes Product von einem jeden q mit einer beliebigen Function der zugehörigen Entropie integrirender Nenner des betreffenden Systems. Die in obiger Gleichung (10^c.) gleichgesetzten Grössen sind also die integrirenden Nenner, die zu den Entropiewerthen Φ_{s_1} und Ψ_{s_2} gehören, die Koppelung ist eine isomore, und die Verwandlungsfähigkeit der inneren Bewegung ist, wie in § 5 erörtert wurde, entsprechenden Beschränkungen unterworfen, wie die der Wärme nach *Carnots* Gesetz.

Es zeigt sich also ganz allgemein, dass, wenn monocyklische Systeme nur solche Verbindungen unter einander zulassen, für welche die genannten zwei Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung gültig sind, dann auch die dritte durch das *Carnot*sche Gesetz ausgesprochene wesentliche Eigenthümlichkeit der Wärme für sie gilt, die beschränkte Umwandlungsfähigkeit. Die genannten beiden Charaktere der Koppelung sind:

1. Die äusseren Kräfte jedes einzelnen Systems hängen nur von dem augenblicklichen Zustand dieses Systems ab und nicht von der eintretenden oder aufhörenden Verbindung mit anderen Systemen. Die Koppelung ist also eine reine Bewegungskoppelung und erzeugt ein neues monocyklisches System.

2. Sobald die Bedingungen des Austausches der inneren Bewegung zwischen zweien oder mehreren Systemen eintreten, hängt das Gleichgewicht der inneren Bewegungen zwischen ihnen davon ab, dass eine bestimmte Function der Parameter eines jeden einzelnen denselben Werth habe, wie die entsprechenden Functionen der andern.

Diese bestimmte Function, welche die der Temperatur in der Wärmelehre zufallende Rolle spielt, muss dann nothwendig ein integrirender Nenner des Systems sein, woraus die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der inneren Arbeit folgt. Andererseits ist hervorzuheben, dass, wenn jede Koppelung isomor ist, und der zweiten der eben angeführten Bedingungen entspricht, auch die erste Bedingung erfüllt sein muss.

Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in der vorstehenden Arbeit des Herrn *von Helmholtz* behandelt ist.

(Von *Kronecker*.)

Im § 4 (S. 126 und 127) der „Principien der Statik monocyklischer Systeme" hat Herr *von Helmholtz* das System von Gleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{b}} q_{\mathfrak{b}} \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = 0, \quad \sum_{\mathfrak{b}} q_{\mathfrak{b}} \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} = \lambda \qquad \binom{\mathfrak{a}=1,2,3,\ldots \mathfrak{A}}{\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B}}$$

behandelt und die Lösung in den a. a. O. mit (6'.) und (6'.) bezeichneten Gleichungen:

$$F = \sigma, \quad q_{\mathfrak{b}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \qquad (\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B})$$

angegeben. Setzt man:

$$\lambda = -q_0, \quad \sigma = x_0 = y_0, \quad p_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}, \quad s_{\mathfrak{b}} = y_{\mathfrak{b}} \qquad \binom{\mathfrak{a}=1,2,3,\ldots \mathfrak{A}}{\mathfrak{b}=1,2,3,\ldots \mathfrak{B}},$$

so lässt sich jenes System von Differentialgleichungen in folgender Weise zusammenfassen:

$$\sum_k q_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad \binom{h=0,1,2,\ldots \mathfrak{A}}{k=0,1,2,\ldots \mathfrak{B}},$$

und es soll nun von der durch die Werthe $q_0 = -\lambda$, $y_0 = x_0$ bewirkten besonderen Beschaffenheit des Systems abstrahirt und überhaupt das System von Differentialgleichungen:

$$\text{(I.)} \qquad \sum_k \varphi_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h=0,1,2,\ldots m;\ k=0,1,2,\ldots n)$$

behandelt werden, in welchem die $n+1$ Coefficienten φ gegebene Functionen der $m+1$ unabhängigen Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$ und der $n+1$ abhängigen Veränderlichen $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ sind. Dabei kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass $n \geqq m$ ist, da im Falle $n < m$ die Functionen φ, deren Index grösser als n ist, gleich Null zu setzen sind.

Es seien:

$$\eta_0(x_0, x_1, \dots x_m), \quad \eta_1(x_0, x_1, \dots x_m), \quad \dots \quad \eta_n(x_0, x_1, \dots x_m)$$

irgend welche Functionen von $x_0, x_1, \dots x_m$, welche für $y_0, y_1, \dots y_n$ gesetzt den Gleichungen (I.) genügen, und es seien nur die ersten $l+1$ Functionen $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ von einander unabhängig. Die folgenden $n-l$ Functionen $\eta_{l+1}, \eta_{l+2}, \dots \eta_n$ sind dann als Functionen von $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ allein, d. h. ohne Hinzunahme der Variabeln x, in der Form:

$$\text{(II.)} \qquad \eta_r = f_r(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l) \qquad {\scriptstyle (r=l+1,\, l+2,\, \dots\, n)}$$

darstellbar, und gemäss den Gleichungen (I.) wird daher:

$$\text{(I'.)} \qquad \sum_g \varphi_g \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} + \sum_{g,r} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial \eta_g} \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \scriptstyle g=0,\,1,\,2,\,\dots\,l \\ \scriptstyle h=0,\,1,\,2,\,\dots\,m \\ \scriptstyle r=l+1,\,l+2,\,\dots\,n \end{pmatrix}.$$

Da $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ als von einander unabhängige Functionen der $m+1$ Variabeln x vorausgesetzt sind, so muss $l \leqq m$ und die Functionaldeterminante der $l+1$ Functionen η, genommen in Beziehung auf gewisse $l+1$ von den $m+1$ Variabeln x, von Null verschieden sein. Die Reihenfolge der Variabeln x kann daher so angenommen werden, dass:

$$\text{(III.)} \qquad \left| \frac{\partial \eta_g}{\partial x_h} \right| \gtrless 0 \qquad {\scriptstyle (g,\, h=0,\, 1,\, 2,\, \dots\, l)}$$

ist. Aus den Gleichungen (I'.) folgt alsdann, dass die $l+1$ Relationen:

$$\text{(IV.)} \qquad \varphi_g = -\sum_{r=l+1}^{r=n} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial \eta_g} \qquad {\scriptstyle (g=0,\, 1,\, 2,\, \dots\, l)}$$

bestehen müssen.

Denkt man sich die $n+1$ Functionen φ sämmtlich mit einer und derselben beliebigen Function der Variabeln x und y, welche mit P bezeichnet werden möge, multiplicirt und alsdann in den Producten $\varphi_k P$ die ersten $l+1$ Variabeln x durch die ersten $l+1$ Functionen η ersetzt, so kommt:

$$\text{(V.)} \qquad \varphi_k P = \psi_k(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l;\ x_{l+1}, \dots x_m) \qquad {\scriptstyle (k=0,\, 1,\, 2,\, \dots\, n)};$$

und eine solche Ersetzung von $x_0, x_1, \dots x_l$ durch $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_l$ muss wegen der Ungleichheit (III.) zulässig sein. Setzt man nun:

$$\text{(VI.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l))\, \psi_r(y_0, y_1, \dots y_l;\ x_{l+1}, \dots x_m) \\ \qquad\qquad = \Phi(y_0, y_1, \dots y_n;\ x_{l+1}, \dots x_m), \end{cases}$$

so wird:

$$
\text{(VII.)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_q} = \sum\limits_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l)) \dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_q} & (q=l+1, l+2, \dots m), \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_r} = \psi_r(y_0, y_1, \dots y_l; x_{l+1}, \dots x_m) = \varphi_r P & (r=l+1, l+2, \dots n), \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_g} = \sum\limits_{r=l+1}^{r=n} (y_r - f_r(y_0, y_1, \dots y_l)) \dfrac{\partial \psi_r}{\partial y_g} - \sum\limits_{r=l+1}^{r=n} \dfrac{\partial f_r}{\partial y_g} \psi_r & (g=0, 1, 2, \dots l).
\end{cases}
$$

Vermöge der Gleichungen (II.) wird hiernach:

$$
\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_g} = -\sum_{r=l+1}^{r=n} \frac{\partial f_r}{\partial y_g} \psi_r = -P \sum_{r=l+1}^{r=n} \varphi_r \frac{\partial f_r}{\partial y_g},
$$

wenn in der Function Φ und deren Ableitungen die Variabeln y durch die entsprechenden Functionen η ersetzt werden. Die letzteren Ableitungen von Φ nach y_g reduciren sich aber alsdann mit Hülfe der Relationen (IV.) auf den Werth $\varphi_g P$, und da die mittlere der Gleichungen (VII.) den analogen Werth $\varphi_r P$ für die Ableitungen von Φ nach denjenigen y liefert, deren Index grösser als l ist, so folgt, dass die Gleichungen:

$$
\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_q} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \varphi_k P \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \dots n \\ q=l+1, l+2, \dots m \end{pmatrix}
$$

oder:

$$
\text{(VIII.)}\quad
\begin{cases}
\Phi = 0, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_{l+1}} = 0, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_{l+2}} = 0, \quad \dots \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_m} = 0, \\
\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} : \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} : \dots : \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n
\end{cases}
$$

bestehen müssen, wenn in der Function Φ und deren Ableitungen an die Stelle der Variabeln y die entsprechenden Functionen η treten. Die Gleichungen (VIII.) repräsentiren daher $m-l+n+1$ Gleichungen zwischen den in der Function Φ enthaltenen $m-l+n+1$ Variabeln:

$$
x_{l+1}, \quad x_{l+2}, \quad \dots \quad x_m; \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_n,
$$

welche aber in der Weise erfüllt sein müssen, dass dabei die Variabeln x unbeschränkt veränderlich bleiben. Sie können also, wenn man darin nach einander $l = m, m-1, m-2, \dots$ nimmt, als die vollständigen Integralgleichungen für die Differentialgleichungen (I.) angesehen werden; denn es existirt, wie sich aus der vorstehenden Entwickelung ergiebt, stets eine Function $\Phi(y_0, y_1, y_2, \dots y_n; x_{l+1}, x_{l+2}, \dots x_m)$, wofür die Gleichungen (VIII.) erfüllt sind, wenn die Variabeln y den Differentialgleichungen (I.) genügen, und andererseits wird diesen Differentialgleichungen offenbar genügt, sobald die Gleichungen (VIII.) in der angegebenen Weise erfüllt sind, da alsdann aus der Differentiation der Gleichung $\Phi = 0$ nach den $m+1$ Variabeln x die Gleichungen (I.) hervorgehen.

Durch die Aufstellung der Gleichungen (VIII.) ist die Lösung der Differentialgleichungen (I.) auf die Auffindung einer Function Φ zurückgeführt, welche so beschaffen ist, dass sich aus den Gleichungen (VIII.) die $n+1$ Grössen y als Functionen der $m+1$ Variabeln x bestimmen, während diese Variabeln x selbst unbestimmt bleiben. Diese letztere Bedingung enthält offenbar eine besondere Schwierigkeit für die Auffindung geeigneter Functionen Φ; sie fällt aber weg, wenn man sich auf diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen (I.) beschränkt, bei denen $l=m$ ist, d. h. bei denen möglichst viele der zu bestimmenden Functionen y von einander unabhängig sind. Alsdann wird nämlich Φ eine Function von y_0, $y_1, \dots y_n$ *allein*, und die Gleichungen:

$$\text{(IX.)}\quad \begin{cases} \Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_0} : \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1} : \dots : \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n \end{cases}$$

repräsentiren nur $n+1$ Gleichungen, welche — so zu sagen — *im Allgemeinen* bei Zugrundelegung irgend einer Function Φ ausreichen, die $n+1$ Variabeln y als Functionen der in $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ enthaltenen Variabeln $x_0, x_1, \dots x_m$ zu bestimmen, und zwar so, dass $m+1$ dieser Functionen von einander unabhängig sind.

Für den Fall $n=m$ folgt aus den Gleichungen (I.) unmittelbar, dass die Functionaldeterminante:

$$\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_h}\right| \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots n)$$

verschwinden und also eine Gleichung $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0$ bestehen muss. Wenn nun möglichst viele Functionen y von einander unabhängig sein sollen, so können nicht alle Subdeterminanten der Ordnung n verschwinden, und man kann daher daraus, dass mit den Gleichungen (I.) zugleich die Gleichungen:

$$\sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots n)$$

erfüllt sein müssen, das Bestehen der Proportionen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_0} : \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} : \dots : \frac{\partial\Phi}{\partial y_n} = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n$$

erschliessen. Es gelten also auch in *diesem* Falle die Integralgleichungen (IX.) für diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen (I.), bei denen möglichst viele Functionen y von einander unabhängig sind.

Ebenso wie im Falle $l=m$ können auch im Falle $l<m$ die Glei-

chungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_{l+1}} = 0, \dots \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = 0$ aus den Integralgleichungen (VIII.) weggelassen und also ganz allgemein die Gleichungen (IX.) als die Integralgleichungen des Systems (I.) angesehen werden, wenn man die Beschaffenheit der Function Φ in (IX.) erstens dahin *erweitert*, dass sie ausser den $n+1$ Grössen y auch noch die Variabeln: $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots x_m$ enthalten darf, zweitens aber in der Weise *beschränkt*, dass für die aus den Gleichungen (IX.) zu bestimmenden Functionen y jede in Beziehung auf je $l+2$ der Variabeln x genommene Functionaldeterminante von je $l+2$ Functionen y verschwinden, dagegen:

$$(\text{III}'.) \qquad \left| \frac{\partial y_g}{\partial x_h} \right| \gtrless 0 \qquad\qquad (g, h = 0, 1, 2, \dots l)$$

sein soll. Vermöge dieser Bedingungen existiren nämlich Functionen f_{rg}, für welche:

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_h} = \sum_g f_{rg} \frac{\partial y_g}{\partial x_h} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \dots l \\ h = 0, 1, 2, \dots m \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix}$$

wird, so dass, da die Differentiation von $\Phi = 0$ gemäss (IX.) zu den $l+1$ Gleichungen:

$$(\text{I}''.) \qquad \sum_k \varphi_k \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \dots l;\ k = 0, 1, 2, \dots n)$$

führt, die Relationen:

$$(\text{I}'''.) \qquad \sum_g \varphi_g \frac{\partial y_g}{\partial x_h} + \sum_{g,r} \varphi_r f_{rg} \frac{\partial y_g}{\partial x_h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, 2, \dots l \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix},$$

analog den oben mit (I'.) bezeichneten, resultiren. Aus diesen folgt, wie dort, wegen der Ungleichheit (III'.), dass:

$$\varphi_g + \sum_r \varphi_r f_{rg} = 0 \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \dots l \\ r = l+1, l+2, \dots n \end{pmatrix}$$

sein muss, und hieraus ergiebt sich endlich, dass die Relationen (I'''.) und also auch die Gleichungen (I''.) nicht bloss für die Werthe $h = 0, 1, 2, \dots l$ sondern auch noch für die übrigen $l-m$ Werthe $h = l+1, l+2, \dots m$ bestehen.

Wird die Gleichung $\Phi(y_0, y_1, \dots y_n) = 0$ dadurch erfüllt, dass darin:

$$y_0 = F(y_1, y_2, \dots y_n)$$

genommen wird, so sind die Gleichungen (IX.) durch folgende zu ersetzen:

$$y_0 = F(y_1, y_2, \dots y_n), \quad -\varphi_0 \frac{\partial F}{\partial y_k} = \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \dots n),$$

und diese gehen unmittelbar in die Integralgleichungen des Herrn *von Helmholtz* über, wenn λ an die Stelle des Factors $-\varphi_0$ tritt.

Das Strahlensystem vierter Ordnung zweiter Klasse.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Die Strahlensysteme n^{ter} Ordnung, welche zwei singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln $(n-1)^{ter}$ Ordnung enthalten, lassen sich definiren als die Gesammtheit der Strahlen, welche entsprechende Punkte zweier in eineindeutiger Verwandtschaft stehenden ebenen Systeme mit einander verbinden. Eine solche Construction für das Strahlensystem zweiter Klasse gelingt deshalb, wenn seine Ordnung nicht höher als die vierte ist *). Die eindeutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen ist dann eine quadratische, und wir gehen bei der Construction des Strahlensystems von einer solchen Beziehung aus. Es ist bei der Betrachtung der Strahlensysteme zweckmässig, verschiedenartige Herleitungen derselben zu benutzen, um alle wichtigen Eigenschaften dieser complicirten Raumgebilde zu übersehen. Dies ist der Grund, weshalb ich nicht von einer schon bekannten Herleitung des Strahlensystems ausgehe. Das demselben zugeordnete System, welches mit ihm dieselbe Brennfläche berührt, ohne ihm gleichartig zu sein, lässt sich in seinen wesentlichen Eigenschaften vollständig darstellen. Es ergiebt durch ihm zugehörende Büschel in singulären Ebenen, welche nicht mit singulären Ebenen des ersten Systems übereinstimmen, Curven, welche sich als Doppelcurven der Brennfläche herausstellen. Auch die Rückkehrcurve der Brennfläche lässt sich mit Hülfe des zweiten Systems leicht construiren. Zum Schlusse mache ich auf einen speciellen Fall aufmerksam, in welchem die Rückkehrcurve zwölfter Ordnung in drei Curven vierter Ordnung zerfällt, und gebe die Modificationen an, welche bei Erniedrigung der Ordnung des ersten Strahlensystems auftreten.

*) Vgl. *Kummer*, über die algebr. Strahlensysteme (Abh. d. Berl. Akad. 1866.)

§ 1.

Construction des Strahlensystems.

Zwei ebene Systeme α und α' seien in quadratischer Punktverwandtschaft. Jeder Geraden in α entspricht dann ein Kegelschnitt in α' projectiv und umgekehrt. Alle diese in α resp. in α' liegenden Kegelschnitte haben drei Punkte mit einander gemein, welche die ***Hauptpunkte*** der quadratischen Transformation heissen. Einem Hauptpunkte von α sind alle Punkte einer Seite des von den Hauptpunkten in α' gebildeten Dreieckes zugewiesen. Einer Geraden des Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt in einem Hauptpunkte von α liegt, entspricht stets wieder und zwar projectiv die Gerade eines Strahlenbüschels in α', dessen Mittelpunkt in α' ein dem ersten Hauptpunkte in α zugeordneter Hauptpunkt ist. Die zweite Gerade wird durch die dem Hauptpunkte gegenüberstehende Seite des Hauptdreieckes zu dem oben erwähnten Kegelschnitte ergänzt. Sind nun α und α' nicht in specieller Lage zu einander, so definiren wir das ***Strahlensystem*** Σ_1 als die ***Gesammtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von α und α'.***

Das Strahlensystem Σ_1 ist von der zweiten Klasse.

Beweis: Eine beliebige Ebene μ schneidet α in einer Geraden l, welcher in α' ein Kegelschnitt λ' entspricht. Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von λ' und μ mit den ihnen entsprechenden Punkten auf l sind die beiden in μ liegenden Strahlen von Σ_1.

Das Strahlensystem Σ_1 ist von der vierten Ordnung.

Beweis: Die Zahl der durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehenden Strahlen von Σ_1 ist gleich der Zahl der Punkte, welche zwei auf einander liegende in quadratischer Verwandtschaft stehende ebene Systeme β und β' entsprechend gemein haben. Einem beliebigen Strahlenbüschel in β entspricht in β' projectiv ein Kegelschnittbüschel. Die Schnitte entsprechender Elemente dieser Büschel liegen auf einer Curve dritter Ordnung C_3, welche die Hauptpunkte von β' enthält. Ein zweiter Strahlenbüschel in β liefert so eine zweite C_3'. C_3 und C_3' haben die Hauptpunkte von β' und zwei Punkte auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Strahlenbüschel in β mit einander gemein. Die Curven schneiden sich daher noch in ***vier*** Punkten, welche beide Systeme β und β' entsprechend gemein haben müssen.

§ 2.

Die singulären Punkte und Ebenen von Σ_1.

1. Wir bezeichnen hinfort die Ebene α mit (1) und ihre Hauptpunkte mit (12), (13), (14), die Ebene α' mit (234) und ihre Hauptpunkte mit (23), (34), (42); so dass die Punktpaare (12) (34), (13) (24), (14) (23) zugeordnete Hauptpunkte sind*). Die sechs Punkte sind dann durch Combination je zweier Ziffern aus der Reihe 1, 2, 3, 4, wofür wir häufig α, β, γ, δ in irgend welcher Folge schreiben, bezeichnet. Wir benennen durch diese Ziffern selbst und durch Combination derselben zu je drei Elementen folgende Ebenen. (β) bezeichne die Ebene der Punkte $(\beta\alpha)$, $(\beta\gamma)$ und $(\beta\delta)$; $(\alpha\delta\gamma)$ die Ebene der Punkte $(\alpha\gamma)$, $(\gamma\delta)$ und $(\delta\alpha)$.

2. Das Strahlensystem Σ_1 besitzt in den sechs Ebenen (β) und $(1\beta\delta)$, wenn β nicht gleich eins ist, Strahlenbüschel erster Ordnung, deren Mittelpunkte (1β) resp. $(\gamma\delta)$ sind; denn jedem Hauptpunkte von (1) oder (234) ist in der quadratischen Verwandtschaft eine Hauptgerade der anderen Ebene zugewiesen. Ist m_α die Schnittgerade der Ebenen (α) und $(\beta\gamma\delta)$, so entspricht der Geraden m_1 als Element von (1) ein Kegelschnitt $\varrho_{(234)}$ in (234) projectiv. Durch Verbindung entsprechender Elemente von m_1 und $\varrho_{(234)}$ entsteht eine Curve dritter Klasse $C^3_{(234)}$, welche m_1 zur Doppeltangente hat und zu Σ_1 gehört. Ebenso enthält die Ebene (1) einen Strahlenbüschel dritter Ordnung $C^3_{(1)}$ von Σ_1 mit dem Doppelstrahle m_1, welchem als Element von (234) der Kegelschnitt $\varrho_{(1)}$ in (1) entsprechen möge. Man bemerke, dass die Linie m_1 in ihren Schnitten mit $\varrho_{(1)}$ die Curve $C^3_{(234)}$ und in ihren Schnitten mit $\varrho_{(234)}$ die $C^3_{(1)}$ berührt.

Die acht benannten Ebenen sind demnach singuläre Ebenen von Σ_1; (1) und (234) enthalten je einen *Strahlenbüschel dritter Ordnung* von Σ_1, die übrigen enthalten ***Büschel erster Ordnung von*** Σ_1 mit den ***benannten Punkten*** als Mittelpunkten. Diese acht Ebenen ordnen sich in vier Paare wie (α) und $(\beta\gamma\delta)$ und sollen die ***singulären Ebenen der ersten Gruppe*** heissen. Die sechs benannten Punkte sind ***singuläre Punkte*** von Σ_1. Die Verbindungsgerade je zweier singulären Punkte, deren Bezeichnungen eine gemeinsame Ziffer haben, ist auch Schnittgerade zweier singulären Ebenen der ersten Gruppe, von welchen als Benennung die eine die gemeinsame

*) Vgl. die Bezeichnungen von Herrn *Reye*, über Strahlensysteme zweiter Klasse etc. (Dieses Journal Bd. 86 S. 84.)

Ziffer, die andre die drei bei der Benennung der beiden Punkte benutzten Ziffern trägt.

3. Es finden sich nun noch Büschel zweiter Ordnung von Σ_1, deren Ebenen wir ***singuläre Ebenen der zweiten Gruppe*** nennen. Durch die quadratische Verwandtschaft zwischen (1) und (234) ist dem Strahlenbüschel (1β) in (1) der Strahlenbüschel $(\gamma\delta)$ in (234) projectiv zugeordnet. Zwei Strahlen von (1β) liegen mit den ihnen entsprechenden von $(\gamma\delta)$ in denselben Ebenen, welche wir mit $(1\beta,\gamma\delta)$ und $(\gamma\delta,1\beta)$ bezeichnen. Jede derselben enthält einen ***Strahlenbüschel zweiter Ordnung*** von Σ_1, welcher durch Verbindung entsprechender Punkte von (1) und (234) entsteht. Diese Strahlenbüschel oder auch die von ihnen umhüllten Curven nennen wir $\varrho_{(1\beta)}$ resp. $\varrho'_{(1\beta)}$; sie werden berührt von den Ebenen (1), (234), (β), $(1\gamma\delta)$, $(1\gamma,\beta\delta)$, $(\beta\delta,1\gamma)$, $(1\delta,\beta\gamma)$, $(\beta\gamma,1\delta)$.

§ 3.

Die Strahlensysteme Σ_2, Σ_3, Σ_4.

1. ***Das Strahlensystem Σ_1 lässt sich auf drei Arten durch eine Regelschaar zweiten Grades beschreiben****). Jeder Punktreihe einer Geraden des Büschels (1β) in (1) ist durch die quadratische Verwandtschaft die Punktreihe einer Geraden des Büschels $(\gamma\delta)$ in (234) projectiv zugewiesen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Punktreihen gehören zu Σ_1 und bilden eine Regelschaar zweiten Grades. So entstehen drei Systeme von Regelschaaren von Σ_1, deren Flächen wir mit $G_{(1\beta)}$ bezeichnen. Der Ort der Berührungspunkte der Flächen $G_{(1\beta)}$ mit (1) resp. (234) ist der Kegelschnitt $\varrho_{(1)}$ resp. $\varrho_{(234)}$. Die $G_{(1\beta)}$ werden von den Ebenen (1)(234), $(\beta)(1\gamma\delta)$, $(1\delta,\beta\gamma)(\beta\gamma,1\delta)$, $(1\gamma,\beta\delta)(\beta\delta,1\gamma)$ in geraden Linien geschnitten, also berührt. Das ***System*** $G_{(1\beta)}$ gehört einer ***Schaarschaar*** mit acht gemeinsamen einander ***associirten Ebenen*** an. Es enthält ***zwei Ebenenpaare:*** (γ) und $(1\beta\gamma)$ mit dem ***Punktpaare*** (1γ) und $(\beta\gamma)$, sowie (δ) und $(1\beta\delta)$ mit dem Punktpaare (1δ) und $(\beta\delta)$. Jede der Ebenen $(1\beta,\gamma\delta)$ $(\gamma\delta,1\beta)$ ***doppelt gezählt ist*** eine Fläche $G_{(1\beta)}$, sodass das System $G_{(1\beta)}$ zwei ***Doppelebenen*** mit den Kegelschnitten $\varrho_{(1\beta)}$ und $\varrho'_{(1\beta)}$ besitzt.

2. Die Regelschaaren der Flächen $G_{(1\beta)}$ bilden das Strahlensystem Σ_1. Die Leitstrahlen der $G_{(1\beta)}$ liefern ein anderes Strahlensystem Σ_β vierter

*) Vgl. *Reye*, a. a. O.

Ordnung zweiter Klasse. Die Ebenen (β) und $(1\gamma\delta)$ werden eindeutig auf einander abgebildet, wenn solche Punkte derselben als entsprechende angesehen werden, welche auf dem nämlichen Strahle von Σ_β liegen. Den Geraden des Büschels (1β) in (β) entsprechen Gerade des Büschels $(\gamma\delta)$ in $(1\gamma\delta)$ der Art, dass sowohl die beiden Büschel als auch die Punktreihen auf den entsprechenden Strahlen der Büschel projectiv auf einander bezogen sind. Dem Punkte (1β) in (β) sind so alle Punkte der Geraden $\overline{(1\gamma)\,(1\delta)}$ in $(1\gamma\delta)$ und dem Punkte $(\gamma\delta)$ in $(1\gamma\delta)$ alle Punkte von $\overline{(\beta\delta)\,(\beta\gamma)}$ zugeordnet. Bemerken wir noch, dass die vier der zweiten Gruppe angehörenden Berührungsebenen des Flächensystems $G_{(1\beta)}$ mit (β) und $(1\gamma\delta)$ Schnittgerade liefern, welche einander entsprechen müssen, so erkennen wir, dass erstens die Geraden des Büschels $(\beta\gamma)$ in (β) den Geraden von (1δ) in $(1\gamma\delta)$ und zweitens die Geraden des Büschels $(\beta\delta)$ in (β) den Geraden von (1γ) in $(1\gamma\delta)$ projectiv zugeordnet sind. Hieraus ergiebt sich aber, dass die zwischen (β) und $(1\gamma\delta)$ durch Σ_β bestimmte Beziehung eine quadratische Verwandtschaft ist, deren Hauptpunkte die in diesen Ebenen liegenden singulären Punkte sind.

3. Das Strahlensystem Σ_1 führt so auf drei mit ihm gleichartige Strahlensysteme. Von einem dieser Σ_β ausgehend wird man ebenfalls zu drei Strahlensystemen geführt, von welchen das erste mit Σ_1 übereinstimmt und ein anderes zwischen den Ebenen (δ) und $(\beta\gamma 1)$ eine quadratische Verwandtschaft liefert, welche nach den dieser Beziehung unterworfenen Bedingungen nicht abweichen kann von der quadratischen Verwandtschaft, welche sich durch das aus Σ_1 abgeleitete Strahlensystem Σ_δ ergiebt. Wir schliessen deshalb:

Die Brennfläche Φ des Strahlensystems Σ_α ist Brennfläche von vier gleichartigen Strahlensystemen vierter Ordnung zweiter Klasse. Je zwei derselben lassen sich durch Flächen $G_{(\alpha\beta)}$ zweiter Ordnung beschreiben, deren Regelschaaren dem einen, deren Leitschaaren dem anderen Systeme angehören. Alle Flächen $G_{(\alpha\beta)}$ enthalten die Punkte $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ und werden von den acht Ebenen $(\alpha)\,(\beta\gamma\delta)$, $(\beta)\,(\alpha\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma,\beta\delta)\,(\beta\delta,\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta,\beta\gamma)\,(\beta\gamma,\alpha\delta)$ berührt. Unter den $G_{(\alpha\beta)}$ befinden sich zwei Ebenenpaare (γ) und $(\alpha\beta\gamma)$ mit dem Punktpaare $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$, sowie (δ) und $(\alpha\beta\delta)$ mit dem Punktpaare $(\alpha\delta)$ und $(\beta\delta)$. Das System $G_{(\alpha\beta)}$ enthält zwei Doppelebenen $(\alpha\beta,\gamma\delta)$ und $(\gamma\delta,\alpha\beta)$ mit den Kegelschnitten $\varrho_{(\alpha\beta)}$ und $\varrho'_{(\alpha\beta)}$.

Die Strahlen von Σ_β bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit (β)

und $(\alpha\gamma\delta)$ eine quadratische Verwandtschaft zwischen diesen Ebenen, deren Hauptpunkte singuläre Punkte sind. Jeder derselben ist Mittelpunkt eines Strahlenbüschels von Σ_β, dessen Ebene eine Bezeichnung trägt, welche entweder durch Hinzufügen oder durch Wegnahme der Ziffer β aus der Bezeichnung des singulären Punktes entsteht. Zwei Ebenen der ersten Gruppe (β) und $(\alpha\gamma\delta)$ enthalten Strahlenbüschel dritter Ordnung von Σ_β, deren gemeinsame Doppeltangente m_β ist. In jeder singulären Ebene $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ der zweiten Gruppe befinden sich zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung $\varrho_{(\alpha\beta)}$ und $\varrho'_{(\gamma\delta)}$. Der erste gehört zu Σ_α und Σ_β, der zweite zu Σ_γ und Σ_δ. Die Strahlenbüschel $\varrho_{(\alpha\beta)}$ und $\varrho'_{(\gamma\delta)}$ sind projectiv auf einander bezogen, wenn solche Strahlen einander entsprechen, welche auf derselben $G_{(\alpha\gamma)}$ liegen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist ein Kegelschnitt, da die Büschel $\varrho_{(\alpha\beta)}$ und $\varrho'_{(\gamma\delta)}$ die in den Ebenen $(\alpha\gamma, \beta\delta)$ und $(\beta\delta, \alpha\gamma)$ liegenden Strahlen entsprechend gemein haben.

4. Eine Fläche $G_{(\alpha\beta)}$ und eine $G_{(\alpha\gamma)}$ haben einen Strahl von Σ_α gemein und schneiden sich ausserdem in einer kubischen Raumcurve. Die Flächenschaar $G_{(\beta\gamma)}$ schneidet auf $G_{(\alpha\beta)}$ und $G_{(\alpha\gamma)}$ Strahlen von Σ_β resp. Σ_γ aus, so dass hierdurch die auf $G_{(\alpha\beta)}$ und $G_{(\alpha\gamma)}$ liegenden zu Σ_β resp. Σ_γ gehörenden Regelschaaren projectiv auf einander bezogen werden. Solche einander entsprechenden Strahlen schneiden sich aber auf dem Strahle von Σ_α, welcher $G_{(\alpha\beta)}$ und $G_{(\alpha\gamma)}$ gemeinsam ist, da dies eintrifft für die zusammengehörenden Strahlen in den Ebenen $(\alpha)(\delta)$, $(\beta\gamma, \alpha\delta)$ und $(\alpha\delta, \beta\gamma)$.

Durch einen beliebigen Punkt P lässt sich deshalb von jedem Strahlensystem Σ_α ein Strahl so construiren, dass je zwei dieser Strahlen auf einer $G_{(\alpha\beta)}$ liegen. Einer dieser Strahlen kann ein beliebiger Strahl eines der vier Systeme sein, die übrigen sind aber dann bestimmt.

5. Hieraus ergiebt sich nun die ***zweite Reye***sche ***Construction*** *), welche das Strahlensystem sechster Ordnung zweiter Klasse erster Art und die niederer Ordnung definirt als die ***Gesammtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projectiven Flächen zweiten Grades.*** Durch Σ_γ resp. Σ_δ sind zwei beliebige Flächen $G_{(\alpha\beta)}$ auf einander projectiv bezogen, wenn solche Punkte einander entsprechen, welche durch einen Strahl von Σ_γ resp. Σ_δ verbunden sind und die drei in diesen Punkten zusammen-

*) ***Reye***, über d. Strahlensystem etc. (Dieses Journal Bd. 93. S. 81).

stossenden Geraden der $G_{(\alpha\beta)}$ und Σ_γ resp. Σ_δ jedesmal eine $G_{(\alpha\gamma)}$ und $G_{(\beta\gamma)}$ resp. eine $G_{(\alpha\delta)}$ und $G_{(\beta\delta)}$ bestimmen.

Eine $G_{(\alpha\beta)}$ und eine $G_{(\gamma\delta)}$ haben stets einen Kegelschnitt mit einander gemein, welcher durch die Punkte $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ geht, er ist der Ort der Schnittpunkte solcher Strahlen der Flächen, welche auf einer $G_{(\beta\gamma)}$ liegen. Alle Strahlen von Σ_γ, welche eine beliebige Gerade l_δ von Σ_δ treffen, bilden erstens eine $G_{(\gamma\delta)}$ und zweitens eine F_γ^4 vierter Ordnung, welche l_δ zur dreifachen Geraden hat. F_γ^4 hat mit jeder Fläche $G_{(\alpha\beta)}$ einen Kegelschnitt gemein und schneidet die Ebenen (γ) und $(\alpha\beta\delta)$ in Kegelschnitten, welche die Punkte $(\gamma\alpha)$ und $(\gamma\beta)$ resp. $(\beta\delta)$ und $(\alpha\delta)$ enthalten.

§ 4.

Das Strahlensystem *S*.

1. Durch die quadratische Verwandtschaft zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ ist einer beliebigen Geraden l von (α) ein Kegelschnitt λ' in $(\beta\gamma\delta)$ projectiv zugewiesen. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte dieser Gebilde gehören zu Σ_α und ergeben eine *Regelfläche* F_α *dritter Ordnung* mit einer *Doppelgeraden* s. Diese Linie s ist aber Doppelgerade einer zweiten Regelfläche dritter Ordnung F'_α von Σ_α, deren einfache Leitlinie in $(\beta\gamma\delta)$ liegt und welche (α) in einem Kegelschnitte trifft. Um dies einzusehen, lege man durch s eine beliebige Ebene, welche ausser einer zu F_α gehörenden Geraden einen zweiten Strahl von Σ_α enthält. Durch den Schnitt A dieses Strahles mit (α), den Schnitt R von s mit (α) und die drei Hauptpunkte $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta)$ lege man einen Kegelschnitt ν. Ihm entspricht in $(\beta\gamma\delta)$ eine Gerade n' projectiv. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von ν und n' ergeben eine F'_α mit einer Doppelgeraden, welche mit s zusammenfallen muss, da s vier Strahlen von F'_α trifft. Diese sind die Strahlen von Σ_α durch die Schnittpunkte von l mit ν und durch A und R.

2. *Alle Strahlen s bilden ein Strahlensystem S, welches wir näher untersuchen wollen.*

Die *quadratische Verwandtschaft* zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ giebt bekanntlich Veranlassung zur Herstellung von *unendlich vielen reciproken Beziehungen* zwischen diesen Ebenen. Um eine solche zu erhalten, ordne man einer beliebigen Geraden l von (α) irgend einen auf dem in der quadratischen Verwandtschaft ihr zugehörenden Kegelschnitt λ' liegenden Punkt L' als entsprechenden zu. Dann ist jedem Strahle n' des Büschels L' in

$(\beta\gamma\delta)$ derjenige Punkt von l zugewiesen, welchem in der quadratischen Verwandtschaft der zweite Schnittpunkt von n' mit λ' zugehört. Nun ist für jede Gerade in (α) in analoger Weise ein Punkt von $(\beta\gamma\delta)$ bestimmt, und man erkennt leicht, dass hierdurch eine reciproke Beziehung zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ hergestellt ist. Die Verbindungsebenen der vermöge derselben einander entsprechenden Elemente von (α) und $(\beta\gamma\delta)$ umhüllen eine Fläche zweiten Grades, und durch Veränderung des Punktes L' auf λ' ergiebt sich so eine einfach unendliche Schaar solcher Flächen. In allen auf diese Weise zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ hergestellten reciproken Beziehungen sind die Hauptpunkte von (α) den Geraden von $(\beta\gamma\delta)$ zugewiesen, welche den ersten auch in der quadratischen Verwandtschaft entsprechen. Wir schliessen daraus, dass die acht singulären Ebenen der ersten Gruppe alle Flächen der Schaar berühren. In der That, diese acht Ebenen sind einander associirt, da sie auf drei Arten in zwei Gruppen zu je vieren, welche durch einen Punkt gehen, geordnet werden können. Betrachten wir nun irgend eine Gerade s einer dieser Flächen G_s, so ist ihrem Schnitte L' mit $(\beta\gamma\delta)$ durch die reciproke Beziehung zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$, mittelst welcher G_s erzeugt wird, eine Gerade l in (α) zugewiesen. Zu l gehört in der quadratischen Verwandtschaft ein Kegelschnitt λ' von $(\beta\gamma\delta)$, dessen Punkte wir von L' aus durch einen Strahlenbüschel projiciren. Diesem entspricht in der reciproken Beziehung die Punktreihe l der Art, dass die Verbindungsebenen entsprechender Elemente den Ebenenbüschel s bilden. Der Büschel s projicirt nun auch nach der oben erörterten Herleitung der reciproken Beziehung die sämmtlichen Verbindungsgeraden der in der quadratischen Verwandtschaft einander entsprechenden Punkte von l und λ'. s ist deshalb Doppelgerade derjenigen F_α, welche l zur einfachen Leitlinie hat. *Das Strahlensystem S lässt sich durch ein einfach unendliches System von Flächen zweiter Ordnung G_s beschreiben, deren Erzeugende beider Art dem Strahlensysteme S angehören.*

3. Wir sind jetzt im Stande die Ordnung und die Klasse von S zu bestimmen.

Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehen vier Strahlen von Σ_α, welche (α) in den Ecken eines vollständigen Viereckes schneiden. Die sechs Seiten desselben sind einfache Leitlinien von Flächen F_α, deren Doppelgeraden durch P gehen. *Das Strahlensystem S ist von der sechsten Ordnung und durch jeden Punkt P gehen drei Flächen G_s.*

Eine beliebige Ebene μ trifft (α) in einer Geraden l und den l in der quadratischen Verwandtschaft zugewiesenen Kegelschnitt λ' in zwei Punkten. Jeder derselben kann der Geraden l in einer reciproken Beziehung entsprechen, für welche μ eine Verbindungsebene zusammengehörender Elemente ist. *Die Ebene μ berührt deshalb zwei Flächen G_s; das Strahlensystem S ist von der vierten Ordnung.*

4. Zu jeder Geraden l der Ebene (α) gehört *ein Strahl von S;* er ist die *Doppelgerade* derjenigen F_α, welche l zur *einfachen Leitlinie* hat. Umgekehrt ist jeder Strahl von S Doppelgerade von *einer F_α*, welche in (α) eine einfache Leitlinie besitzt. So ist eine eindeutige Abbildung des Strahlensystems S auf die Geraden der Ebene (α) oder auch $(\beta\gamma\delta)$ bestimmt. Durch einen beliebigen Punkt A von (α) gehen drei Tangenten an $C^3_{(\alpha)}$, welche drei Punkte von m_α mit den ihnen in der quadratischen Verwandtschaft zugeordneten Punkten von ϱ_α verbinden. Die drei Verbindungslinien dieser Punkte auf ϱ_α sind einfache Leitgeraden von drei F_α, deren Doppelgeraden durch A gehen.

Ist l eine Tangente von C^3_α, so fällt der l entsprechende Strahl s mit l zusammen. Ist l eine Gerade des Büschels $(\alpha\beta)$ in (α), so zerfällt F_α in eine $G_{(\alpha\beta)}$ und die Ebene (β), und s ist deshalb eine Tangente von C^3_β in (β).

Zwei sich schneidende Gerade l und l' in (α) und $(\beta\gamma\delta)$ sind Leitlinien einer F_α und einer F'_α, deren Doppellinien sich treffen müssen, denn sie enthalten beide den Schnittpunkt der Strahlen von Σ_α in der Ebene (ll'). Bewegt sich daher die Gerade l um einen Punkt M von m_α, so beschreibt s die Regelschaar einer Fläche G_s, zu welcher die durch M gehende Tangente von C^3_α gehört. Der zweite Schnitt von G_s mit m_α ist Mittelpunkt eines Büschels, welchen l beschreibt, während s die Leitschaar von G_s durchläuft.

Da die Flächen G_s von den acht singulären Ebenen der ersten Gruppe berührt werden und S die Büschel dritter Ordnung C^3_β $C^3_{(\alpha\gamma\delta)}$ enthält, so müssen die Strahlensysteme Σ_β, Σ_γ, Σ_δ zu demselben Strahlensysteme S führen wie Σ_α, d. h. *alle Strahlen von Σ_β, welche eine Gerade s von S treffen, ergeben zwei Regelflächen dritter Ordnung, deren einfache Leitlinien in (β) und $(\alpha\gamma\delta)$ liegen.*

5. Wird m_α, die Schnittgerade von α und $(\beta\gamma\delta)$, als Element von $(\beta\gamma\delta)$ betrachtet, so entsprechen ihr in den in No. 2 aufgestellten reciproken Beziehungen zwischen beiden Ebenen der Reihe nach die Punkte des

Kegelschnittes $\varrho_{(\alpha)}$ in (α). Es ist deshalb ϱ_α der Ort der Berührungspunkte der Flächen G_s mit (α) und aus demselben Grunde ist $\varrho_{(\beta\gamma\delta)}$ der Ort der Berührungspunkte der G_s mit $(\beta\gamma\delta)$. Eine Fläche G_s enthält zwei in einem Punkte R von ϱ_α zusammenstossende Gerade von (α). Diese verbinden solche Punkte von ϱ_α mit m_α, welche in der quadratischen Verwandtschaft zwischen α und $(\beta\gamma\delta)$ einander entsprechen; d. h. sie sind die beiden Tangenten von C_α^3, welche durch R gelegt werden können und von welchen keine den Punkt R mit dem ihm auf m_α entsprechenden Punkte verbindet. Rückt R in einen singulären Punkt $(\alpha\beta)$, so zerfällt G_s in das Ebenenpaar $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ $(\gamma\delta, \alpha\beta)$ mit dem Punktpaare $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$.

6. Die Geradenpaare von C_α^3, welche auf einer G_s liegen, ergeben, da ihre Schnittpunkte auf einem C_α^3 dreimal berührenden Kegelschnitte ϱ_α sich befinden, eine Involution der Strahlen C_α^3. Diese schneidet auf der Doppeltangente m_α eine Punktinvolution aus. Die Flächen G_s schneiden deshalb die vier Geraden m_α in den Punktpaaren einer Involution. Die Ordnungspunkte dieser vier Involutionen ergeben zwei Flächen G_s, von welchen jede aus einer doppelt zählenden Ebene π resp. π' besteht. Jede dieser Ebenen enthält von S einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung π_s resp. π'_s, welcher von den acht Ebenen der ersten Gruppe berührt wird.

7. Aus dem Vorhergehenden schliessen wir:

Die Flächen G_s werden von den acht singulären Ebenen der ersten Gruppe berührt. Unter den G_s giebt es drei Ebenenpaare, die Paare der singulären Ebenen der zweiten Gruppe, mit Punktpaaren, welche singuläre Punktpaare sind; ferner finden sich unter den G_s zwei Doppelebenen.

Das Strahlensystem S ist sechster Ordnung vierter Klasse. Es besitzt sechs singuläre Punkte, welche übereinstimmen mit den singulären Punkten der Systeme Σ. Jeder derselben enthält von S zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, welche in den durch diesen Punkt gehenden singulären Ebenen der zweiten Gruppe sich befinden. Die singulären Ebenen der ersten Gruppe enthalten von S je einen Strahlenbüschel dritter Ordnung, welcher auch einem Σ angehört. Schliesslich liegen die Ordnungspunkte der auf den Geraden m_α durch die Ebenenpaare der zweiten Gruppe bestimmten Involutionen in zwei Ebenen π und π', welche je einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung von S enthalten. Diese Ebenen sind deshalb singuläre Ebenen von S, aber nicht von den Σ_α.

§ 5.

Die Brennfläche der Strahlensysteme.

1. Da je zwei der Strahlensysteme Σ_α durch eine Schaar von Flächen zweiter Ordnung beschrieben werden können, so *umhüllen alle Σ_α dieselbe Brennfläche Φ*. Durch eine Gerade l in (α) lassen sich zwei Ebenen legen, welche den der Geraden l in $(\beta\gamma\delta)$ entsprechenden Kegelschnitt λ' berühren. Jede dieser Ebenen enthält nur einen Strahl von Σ_α und nur (nach § 4, 3) zwei Strahlen von S. Es sind in diesen Ebenen zweimal zwei Strahlen von S zusammengefallen. *Die Ebenen sind Tangentialebenen von Φ; die Brennfläche von S ist ebenfalls Φ.* Ein Strahl s von S ist Doppelgerade zweier verschiedenen Flächen dritter Ordnung, welche durch Strahlen von Σ_α gebildet werden, und welche zwei Erzeugende gemein haben. Die Schnittpunkte derselben mit s sind die Berührungspunkte von s mit Φ; die Ebenen, welche diese Strahlen mit s verbinden, die dazu gehörenden Tangentialebenen von Φ. s schneidet ausserdem die Fläche Φ noch in den vier Cuspidalpunkten der Flächen F_α und F'_α.

Φ ist deshalb von der vierten Klasse und achten Ordnung.

2. Wenn die gemeinschaftlichen Erzeugenden der F_α und F'_α, welche dieselbe Doppelgerade s haben, in dem *nämlichen Punkte* von s eintreffen, so besitzt dieser Punkt von Φ *zwei verschiedene Tangentialebenen* und ist deshalb ein Punkt der *Doppelcurve* von Φ. Die Linie s selbst ist *Tangente* der Doppelcurve.

Gehört s der Ebene π oder π' an, ist s also eine Tangente des Kegelschnittes π_s oder π'_s, so haben die beiden F_α und F'_α in (α) resp. $(\beta\gamma\delta)$ Leitlinien, welche sich auf m_α in einem der Ordnungspunkte der auf dieser Geraden durch die G_s ausgeschnittenen Involution treffen (§ 4, 6). Die Verbindungsebene dieser einfachen Leitlinien enthält zwei Strahlen von Σ_α, welche F_α und F'_α gemein haben. Die Tangenten von π_s und π'_s sind daher Tangenten der Doppelcurve von Φ.

Φ besitzt in den Curven π_s und π'_s zwei Doppelcurven zweiten Grades.

Die Schnittgerade u von π und π' enthält die Doppelpunkte der beiden Curven vierter Ordnung, in welchen π und π' die Fläche Φ schneiden. In der Ebene $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ treffen sich die beiden von Σ_α resp. Σ_γ eingehüllten Kegelschnitte in den Punkten eines Viereckes, dessen einer Diagonalpunkt auf u liegt.

3. ***Alle singulären Ebenen der Systeme Σ sind auch singuläre Ebenen von Φ; jede berührt Φ längs eines Kegelschnittes.***

Die Ebenen der ersten Gruppe schneiden Φ ausserdem in Curven dritter Klasse vierter Ordnung, welche von Geraden s eingehüllt werden. Eine Ebene der zweiten Gruppe $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ berührt Φ in dem Kegelschnitt, in welchem die Flächen $G_{(\alpha\gamma)}$ etc. von der Ebene tangirt werden, und schneidet Φ in zwei Kegelschnitten, welche durch Strahlen von Σ_α und Σ_γ umhüllt werden.

Die singulären Punkte der Σ und S sind Knotenpunkte von Φ. Durch $(\alpha\beta)$ gehen unendlich viele $G_{(\alpha\beta)}$, deren Tangentialebenen in $(\alpha\beta)$ den Kegel einhüllen, welcher sich der Fläche Φ in diesem Knotenpunkte anschmiegt.

4. ***Die Fläche Φ besitzt eine Rückkehrcurve R_{12} zwölfter Ordnung,*** welche wir mit Hülfe der G_s finden.

Alle Flächen G_s werden von acht Ebenen berührt und gehören deshalb einer Schaarschaar an. Da nun die Pole irgend zweier Ebenen bezüglich dieser Schaarschaar entsprechende Gebilde zweier collinearen Ebenen beschreiben und der Ort der Pole einer singulären Ebene der ersten Gruppe ein Kegelschnitt ist, so ist der Ort der Pole jeder Ebene bezüglich aller G_s ein Kegelschnitt, welcher die drei Geraden $\overline{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ trifft. Drei Ebenen liefern so drei solche Kegelschnitte, welche projectiv auf einander bezogen sind, wenn solche Punkte als entsprechende gelten, welche die Pole der drei Ebenen bezüglich derselben G_s sind. Die Verbindungsebenen je dreier entsprechenden Punkte dieser Kegelschnitte bilden einen ***Ebenenbüschel dritter Ordnung*** V_3, da dreimal drei entsprechende Punkte auf einer Geraden $\overline{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ liegen. ***V_3 ist der Ort der Polaren des Schnittpunktes P der drei Ebenen bezüglich aller G_s.*** Die zweien Punkten so zugewiesenen Ebenenbüschel V_3 sind projectiv, wenn solche Ebenen derselben einander entsprechen, welche die Polaren der beiden Punkte bezüglich derselben G_s sind. Diese entsprechenden Elemente der beiden V_3 sind aber auch entsprechende Elemente zweier collinearen Räume.

5. Wir machen nun Gebrauch von folgendem Satze, der leicht zu beweisen ist.

„Kennt man ein System von unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung mit der Eigenschaft, dass je zwei Polaren irgend zweier festen Punkte des Raumes bezüglich derselben Fläche des Systems entsprechende Ele-

mente zweier collinearen Räume sind, so gehören die Flächen des Systemes einem Flächengebüsche an."

Die Flächen G_s gehören deshalb zu einem Flächengebüsche, welches wir projectiv beziehen auf ein räumliches System*), indem wir jeder Fläche die auf sie bezügliche Polare eines festen Punktes zuweisen. Es entsprechen dann (nach No. 4) den sämmtlichen G_s die Ebenen eines Büschels V_3. Je zwei unendlich nahe G_s schneiden sich in einer Raumcurve C_4 vierter Ordnung, längs welcher G_s die Fläche Φ berührt. Diese C_4 werden demnach abgebildet auf die Tangenten von V_3. Die Schnitte dreier unendlich nahen G_s sind Punkte der Rückkehrcurve von Φ, welche somit auf die von dem Büschel V_3 eingehüllte kubische Raumcurve abgebildet ist. Jedem Punkte von V_3 entsprechen aber acht associirte Punkte der Rückkehrcurve. Diese acht Punkte bilden zwei Gruppen von je vieren, welche in einer Ebene liegen; die Ebenen beider Gruppen sind durch π und π' harmonisch getrennt.

Da nun die Punkte von V_3 durch drei projective Ebenenbüschel, deren Träger Tangenten von V_3 sind, construirt werden können, so wird die Rückkehrcurve durch drei projective Flächenbüschel zweiten Grades, deren Grundcurven die Berührungscurven von irgend drei G_s mit Φ sind, erzeugt werden. Hierdurch ergiebt sich aber eine Raumcurve zwölfter Ordnung R_{12}. Zwei solcher projectiven Büschel erzeugen eine Fläche vierter Ordnung, welche Φ in R_{12} und den Grundcurven der Büschel schneidet. Insbesondere können die Doppelcurven π_s und π'_s Grundcurven dieser Büschel sein, und es ergiebt sich dann *eine Fläche vierter Ordnung, welche Φ nur in den Doppelcurven und der Rückkehrkante schneidet.*

Jede singuläre Ebene der zweiten Gruppe ist Schmiegungsebene von R_{12} in den vier Punkten, in welchen die Schnittcurven die Berührungscurve der Ebene mit Φ tangiren.

Die Ebene π oder π' enthält vier stationäre Punkte von R_{12} in den Berührungspunkten von π_s oder π'_s mit der Curve vierter Ordnung, in welcher π oder π' die Fläche Φ schneidet. Die Tangente von R_{12} in einem solchen Punkte liegt in π resp. π'.

Jede singuläre Ebene der ersten Gruppe ist Schmiegungsebene von R_{12} in den drei Berührungspunkten des Kegelschnittes ϱ mit der Curve C^3 und *schneidet R_{12} in den drei Rückkehrpunkten von C^3.*

*) Vgl. *Reye* (dieses Journal Bd. 86. S. 84).

§ 6.

Beziehungen zwischen den Strahlensystemen.

1. Alle bisher betrachteten Regelflächen von Σ_α sind Specialisirungen allgemeinerer Regelflächen des Strahlensystems, von welchen wir drei Schaaren von Flächen vierter Ordnung hervorheben wollen.

Durch die Punkte $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\gamma)$ legen wir einen beliebigen Kegelschnitt der Ebene (α). Ihm entspricht vermöge der quadratischen Verwandtschaft zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ ein Kegelschnitt in $(\beta\gamma\delta)$, welcher die Punkte $(\gamma\delta)$ und $(\beta\delta)$ enthält. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Curven bilden eine *Fläche vierter Ordnung,* welche zu Σ_α gehört und mit D_α bezeichnet werden soll. Analog construiren wir die Flächen B_α und C_α von Σ_α, und A_β, B_β, C_β von Σ_β etc. Durch die Strahlen von Σ_β ist die Fläche D_α eindeutig auf die Ebene (β) oder auch $(\alpha\gamma\delta)$ abgebildet, wenn solche Punkte von (β) und D_α einander entsprechen, welche durch einen Strahl l_β von Σ_β verbunden sind und dieser Strahl l_β mit dem durch den betrachteten Punkt von D_α gehenden Strahle von D_α auf einer $G_{(\alpha\beta)}$ liegt.

Man erhält so die von *Clebsch* *) gefundene *eindeutige Abbildung der Regelfläche vierten Grades auf eine Ebene.* Diese Abbildung giebt Veranlassung, die Curven zu studiren, in welchen die Regelflächen einander schneiden. Man findet folgende Sätze:

Die fünffach unendlich vielen kubischen Raumcurven aller Flächen D_α liegen auch auf den Flächen D_β und *D_γ.*

Die vierfach unendlich vielen Kegelschnitte der D_α liegen auch auf den A_δ und $G_{(\beta\gamma)}$.

Die vierfach unendlich vielen Kegelschnitte der Flächen dritter Ordnung F_α resp. F'_α liegen auf den Flächen F_β, F_γ und F_δ resp. auf den F'_β, F'_γ und F'_δ.

2. *Alle Strahlen von S, welche einen beliebigen Strahl l_α von Σ_α schneiden, bilden zwei rationale Flächen fünfter Ordnung.* Sie bestehen aus den Doppelgeraden von Flächen F_α resp. F'_α, welche l_α enthalten. l_α ist dreifache Gerade jeder der Flächen fünfter Ordnung, welche ausserdem je eine kubische Raumcurve zur Doppelcurve haben. Die erste Fläche wird von (α), die zweite von $(\beta\gamma\delta)$ in einem Kegelschnitt getroffen.

---

*) *Clebsch,* über die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierter Ordnung (Math. Ann. Bd. 2 S. 445).

3. Die quadratische Verwandtschaft zwischen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ hat (§ 4. 2) Veranlassung gegeben zur Bestimmung von unendlich vielen reciproken Beziehungen zwischen diesen Ebenen. Betrachten wir eine dieser Beziehungen und construiren wir die Verbindungsstrahlen eines jeden Punktes von (α) oder $(\beta\gamma\delta)$ mit allen auf der ihm entsprechenden Geraden von $(\beta\gamma\delta)$ oder (α) liegenden Punkten, so bilden diese Strahlen, wie Herr *Hirst* *) gezeigt hat, einen Complex zweiten Grades. Die Singularitätenfläche desselben besteht aus den Ebenen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ und aus der durch die reciproke Beziehung bestimmten G_s; reciprok aus den Tangentialebenen von G_s und den beiden Ebenenbündeln, deren Mittelpunkte die Schnitte von G_s mit m_α sind. Zu diesem Complexe gehören nun auch die Strahlen von Σ_α, *sodass Σ_α als gemeinsamer Schnitt von einfach unendlich vielen Complexen zweiten Grades erscheint.* Unter denselben befinden sich *drei Reye*sche mit den Tetraedern:

$$(\alpha)\quad(\beta\gamma\delta)\quad(\alpha\beta,\gamma\delta)\quad(\gamma\delta,\alpha\beta),$$
$$(\alpha)\quad(\beta\gamma\delta)\quad(\alpha\gamma,\beta\delta)\quad(\beta\delta,\alpha\gamma),$$
$$(\alpha)\quad(\beta\gamma\delta)\quad(\alpha\delta,\gamma\beta)\quad(\gamma\beta,\alpha\delta).$$

Wir finden nun leicht, dass die sechs Verbindungsebenen der vier durch einen beliebigen Punkt gehenden Strahlen von Σ_α auf m_α drei Punktpaare der Involution ausschneiden, deren Ordnungselemente auf π und π' liegen.

§ 7.

Specielle Fälle.

1. Sind zwei feste Ebenen (1) und (234) und ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung gegeben, so können die Ebenen eindeutig auf einander bezogen werden, wenn jedem Punkte der Ebene (1) derjenige Punkt von (234) zugewiesen wird, welcher ihm hinsichtlich aller Flächen des Büschels conjugirt ist. Die Verwandtschaft zwischen den Ebenen ist dann eine *quadratische* und die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte bilden ein *specielles Strahlensystem Σ_1 vierter Ordnung zweiter Klasse.* Die Curven $\varrho_{(1)}$ und $\varrho_{(234)}$ *treffen einander in zwei Punkten auf m_1*, durch welche Gerade auch die Ebenen π und π' gehen. Das Strahlensystem Σ_1 gehört zu den *Hauptstrahlen eines Flächengebüsches*, welches durch den oben benutzen Büschel

*) *Hirst*, on the complexes generated by two correlative planes (in mem. dom. *Chelini*, collectanea math. ed. *Cremona* et *Beltrami*).

und die Ebenen (1) und (234), jede doppelt als Fläche zweiter Ordnung gerechnet, bestimmt ist. Das Gebüsch enthält ausser unendlich vielen Ebenenpaaren des Büschels m_1 noch drei Ebenenpaare, welche mit den singulären Ebenenpaaren der zweiten Gruppe von Σ_1 übereinstimmen. Vier Strahlen von Σ_1, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen, treffen die durch (1) und (234) von P harmonisch getrennte Ebene in vier Punkten. Die durch dieselben gehenden Strahlen von Σ_1 schneiden auf der Ebene $(m_1 P)$ die nämliche Gruppe von vier Punkten aus. *Ein Strahlensystem Σ_α ist stets in dieser Weise specialisirt, sobald die Kegelschnitte $\varrho_{(\alpha)}$* und *$\varrho_{(\beta\gamma\delta)}$ zwei Punkte gemein haben.*

2. *Wenn die vier zusammengehörenden Strahlensysteme Σ_α die Eigenschaft, Hauptstrahlen je eines Flächengebüsches zu sein, haben sollen, so muss Folgendes eintreten.*

Die vier Geraden m_α, m_β, m_γ und m_δ liegen in einer Ebene, mit welcher π und π' zusammenfallen; die Geraden $\overline{(\alpha\beta)\,(\gamma\delta)}$, $\overline{(\alpha\gamma)\,(\beta\delta)}$ und $\overline{(\alpha\delta)\,(\beta\gamma)}$ treffen sich in einem Punkte K. Die Doppelkegelschnitte von Φ, π_s und π'_s werden von den Linien m_α berührt; die Flächen G_s schneiden auf π den durch π_s und π'_s bestimmten Curvenbüschel aus. Die Geradenpaare desselben werden von K aus durch die Ebenenpaare der zweiten Gruppe projicirt. Die Ebenen (α) und $(\beta\gamma\delta)$ sind durch K und π harmonisch getrennt. Alle G_s haben ein gemeinsames Poltetraeder, dessen Eckpunkte die Ecken des Poldreieckes von π_s und π'_s und der Punkt K sind. Die Fläche Φ entspricht sich selbst in den drei durch das Poltetraeder bestimmten collinearen Involutionen. Ist K das Involutionscentrum und π die Involutionsebene, so geht jedes der Systeme S und Σ_α in sich selbst über. Bei jeder anderen Involution geht S in sich über und die Systeme Σ_α werden mit einander vertauscht.

Durch einen beliebigen Punkt P gehen drei Flächen G_s, welche eine Raumcurve gemein haben. Der Ort der Polaren von P bezüglich aller G_s ist ein Kegel dritter Klasse, dessen drei Cuspidalkanten *dreien Raumcurven vierter Ordnung entsprechen, in welche die Rückkehrcurve R_{12} zerfallen ist.* Die Kegelschnitte $\varrho_{(\alpha)}$ und $\varrho_{(\beta\gamma\delta)}$ treffen sich in zwei Punkten auf m_α.

3. Haben die sechs singulären Punkte die in No. 2 angegebene Lage, so kann der Kegelschnitt $\varrho_{(\alpha)}$ in (α) noch beliebig gewählt werden; dann ist aber alles Uebrige mitbestimmt. Trifft die Tangente t von $\varrho_{(\alpha)}$ in $(\alpha\beta)$ die Gerade $\overline{(\alpha\gamma)\,(\alpha\delta)}$ auf m_α, so liegt t auf der Ebene $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ und

der in dieser Ebene befindliche Strahlenbüschel $\varrho_{(\alpha\beta)}$ von Σ_α und Σ_β umhüllt denselben Kegelschnitt, in welchem $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ die Fläche Φ berührt.

$\varrho_{(\alpha\beta)}$ ist eine Rückkehrcurve von Φ; eine andre Rückkehrcurve findet sich in $(\gamma\delta, \alpha\beta)$ und der sie umhüllende Strahlenbüschel gehört zu Σ_γ und Σ_δ. *R_{12} ist hier zerfallen in zwei Raumcurven vierter Ordnung und zwei Kegelschnitte.*

Trifft nun auch noch die Tangente von ϱ_α an dem Punkte $(\alpha\gamma)$ die Gerade $\overline{(\alpha\beta)(\alpha\delta)}$ auf m_α, so liegt der Schnitt der Tangente von ϱ_α in $(\alpha\delta)$ mit $\overline{(\alpha\gamma)(\alpha\beta)}$ ebenfalls auf m_α und die *Rückkehrcurve R_{12} ist in sechs Kegelschnitte, welche in den singulären Ebenen der zweiten Gruppe liegen, zerfallen.* In diesem Falle kann die Gleichung der zu Φ reciproken Fläche vierter Ordnung in der Form: $4(z^2-y^2)(z^2-x^2)-(z^2-y^2-x^2+c^2)^2 = 0$ geschrieben werden.

§ 8.

Das Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse.

1. Haben zwei in quadratischer Verwandtschaft stehende Ebenen einen Punkt entsprechend gemein, so bilden die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte der Ebenen ausser einem Strahlenbündel ein Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse, dessen wichtigste Eigenschaften ich in einem früheren Aufsatze betrachtet habe*). Wir wollen die dort eingeführten Bezeichnungen der zehn singulären Punkte und der fünfzehn singulären Ebenen auch hier verwenden. Vierzehn singuläre Ebenen ergeben sich wie oben bei dem Systeme vierter Ordnung, die fünfzehnte fällt mit π und π' zusammen. Jedes der Systeme vierter Ordnung zerfällt hier in ein System dritter Ordnung zweiter Klasse und ein System erster Ordnung nullter Klasse; das System S löst sich in zwei Systeme dritter Ordnung zweiter Klasse auf.

Die Brennfläche Φ wird von sechs gleichartigen Strahlensystemen umhüllt und ist vierter Klasse sechster Ordnung; sie entsteht aus der Brennfläche des Systems vierter Ordnung durch Ausfall der zweimal zählenden Ebene π.

2. Die Fläche Φ besitzt *keine Doppelcurve*, aber eine ***Rückkehrcurve sechster Ordnung***, welche man in folgender Weise erhält. In jeder

*) Das Strahlensystem dritter Ordnung etc. (dieses Journal Bd. 91. S. 1).

der fünfzehn singulären Ebenen $(\mu\nu)$ befindet sich ein Kegelschnitt, in welchem $(\mu\nu)$ die Fläche Φ berührt und ein zweiter Kegelschnitt, in welchem sie Φ schneidet. Beide Kegelschnitte berühren einander in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade wir mit $c_{\mu\nu}$ bezeichnen wollen. Bei näherer Betrachtung der Lage dieser fünfzehn Geraden ergiebt sich nun, dass sie alle auf *einer Fläche dritter Ordnung* F_3 liegen, deren zwölf übrige Geraden eine *Schläfli*sche *Doppelsechs* bilden.

Die Paare $a_\mu b_\mu$ derselben gehören zu den Strahlensystemen Σ_μ. F_3 hat mit Φ die dreimal zählende Rückkehrcurve R_6 von Φ gemein; R_6 liegt auf *einer Fläche zweiter Ordnung*. Die Gleichung von Φ lässt sich deshalb auf die Form: $U^2+V^3=0$ bringen, wobei U ein Ausdruck dritten, V ein Ausdruck zweiten Grades in den Coordinaten ist. R_6 kann zerfallen in einen Kegelschnitt und eine Curve vierter Ordnung und schliesslich in drei Kegelschnitte. —

3. In der oben genannten Arbeit habe ich gezeigt, dass jedes der Strahlensysteme Σ_μ aus den Hauptstrahlen eines Gewebes von Flächen zweiter Ordnung (das ist ein zu einem Gebüsche reciprokes System) mit fünf festen Tangentialebenen besteht. Das Gewebe kann auf die Ebenen des Raumes so projectiv bezogen werden, dass jede Ebene die ihr entsprechende Fläche in zwei Hauptstrahlen schneidet. Die Strahlen von Σ_μ sind dann sich selbst entsprechende Linien. Nennen wir den Raum des Gewebes R_1, denjenigen der Ebenen R_2, so finden wir folgende Beziehungen *). Einer Ebene α_1 von R_1 entspricht in R_2 der Schnittpunkt der in α_1 liegenden Strahlen von Σ_μ. Einem Punkte von R_2 sind so drei Ebenen in R_1 zugewiesen. Den Ebenen eines Büschels in R_1 entsprechen in R_2 die Punkte eines Kegelschnittes, welcher den Träger des Büschels schneidet. Allen Punkten einer Ebene β_2 von R_2 entsprechen in R_1 die Tangentialebenen einer Fläche des Gewebes, welche von β_2 berührt wird. Den *Ebenen eines Bündels* P_1 in R_1 entsprechen in R_2 die Punkte einer *Steiner*schen *Fläche vierter Ordnung* F_4, deren drei Doppelgeraden die durch P_1 gehenden Strahlen von Σ_μ sind.

Bestimmt man nun in jeder Ebene des Bündels P_1 den Strahlenbüschel, zu welchem die in dieser Ebene liegenden Strahlen von Σ_μ gehören, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass die Gesammtheit aller Strahlen dieser

---

*) Vgl. *Reye* (dieses Journal Bd. 86. S. 84.

Büschel einen Complex zweiten Grades bilden, welchem Σ_μ angehört und dessen Singularitätenfläche F_4 ist. *Σ_μ liegt also in dreifach unendlich vielen Complexen zweiten Grades, deren Singularitätenflächen Steinersche Flächen vierter Ordnung sind.*

Liegt P_1 in einer Ebene $(\mu\nu)$, so zerfällt F_4 in diese Ebene und eine Regelfläche dritter Ordnung.

Σ_μ liegt in fünf Schaaren doppelt unendlich vieler Complexe, deren Singularitätenflächen aus einer Ebene und einer Regelfläche dritter Ordnung bestehen. Ebenso folgt: Σ_μ liegt in zehn Schaaren einfach unendlich vieler Complexe, deren Singularitätenflächen aus zwei Ebenen und einer Fläche zweiter Ordnung bestehen.

Liegt endlich P_1 in dem Schnittpunkt dreier Ebenen $(\mu\nu)$, so findet man:

Das Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse liegt in zehn Reyeschen Complexen, deren Tetraeder durch vier Ebenen $(\mu\alpha)(\mu\beta)(\mu\gamma)(\delta\varepsilon)$ *gebildet werden.*

Aachen, im November 1883.

Nachschrift. Nachdem der vorliegende Aufsatz der Redaction des Journals eingesandt war, ist eine Abhandlung des Herrn *Hirst* (Proceedings of the London Math. Soc. vol. XIV) *on Cremonian congruences* erschienen, in welcher die hier benutzte Construction des Strahlensystems vierter Ordnung zweiter Klasse angegeben ist. Da durch die vier gleichartigen Strahlensysteme nicht alle Singularitäten der Brennfläche erschöpft werden können, so bietet meine Arbeit durch die Construction des zugeordneten Systems und der daraus folgenden Singularitäten der Brennfläche wohl noch einiges Interessante.

Aachen, im Juli 1884.

Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Argumente.

(Von Herrn *F. Caspary*.)

Herr *Weierstrass* hat (vgl. *Königsberger*, dieses Journal Bd. 64, S. 24 flgd.) aus einer für das Product zweier Thetafunctionen geltenden Identität vermöge eines eigenthümlichen Eliminationsverfahrens das Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunctionen hergeleitet. Auf demselben Wege kann man auch zu einem Additionstheorem der allgemeinen Thetafunctionen mehrerer Argumente gelangen, wenn man wie a. a. O. eine passende Anzahl von Thetafunctionen zum Verschwinden bringt. Ich werde aber im Folgenden zeigen, dass man aus jener *Weierstrass*schen Productenformel, ohne irgend welche Elimination, allein mittels einer aus dem Multiplicationssatze der Determinanten hervorgehenden Identität, unmittelbar ein Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Argumente in schliesslicher Endform erhält. Aus diesem Additionstheorem, welches das von Herrn *Frobenius* (dieses Journal Bd. 89, S. 201) durch Untersuchungen über *Göpel*sche Charakteristiken gewonnene sofort ergiebt, leite ich dann noch einige Folgerungen und Specialisirungen ab.

Bezeichnet*) man die ϱ-fach unendliche Reihe

$$\sum_{n_1, n_2, \dots n_\varrho} e^{2i\pi \sum_{\alpha} (u_\alpha + \frac{1}{2}\delta_\alpha)(n_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha) + i\pi \sum_{\alpha,\beta} \tau_{\alpha\beta}(n_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha)(n_\beta + \frac{1}{2}\varepsilon_\beta)}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots \varrho;\ n_\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ in inf.})$$

durch

$$\vartheta(u;\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

und, wenn die Hinzufügung der $\tau_{\alpha\beta}$ nöthig wird, durch

---

*) Diese einfache und übersichtliche Bezeichnungsweise rührt von Herrn *Weierstrass* her; ich bemerke aber, dass bei Herrn *Weierstrass* die mit δ_α und ε_α bezeichneten Grössen *beliebige* Parameter sein können, während sie hier mod. 2 reducirt nur die Werthe 0 und 1 annehmen sollen.

$$\vartheta(u;\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\,\tau),$$

so erhält man aus der von Herrn *Weierstrass* a. a. O. S. 24 für das Product zweier Thetafunctionen gegebenen Formel die folgende allgemeinere:

$$(1.)\quad \vartheta(u^{(p)}+v^{(q)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\,|\,\tau)\,\vartheta(u^{(p)}-v^{(q)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon\,|\,\tau) = \sum_k A_{kp}B_{kq} = C_{pq} \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=1,\,2,\,\dots\, r\\ r=2^{\varrho}\end{smallmatrix}\right),$$

in welcher

$$(2.)\quad \begin{cases} A_{kp} = \vartheta(2u^{(p)};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\lambda^{(k)}\,|\,2\tau),\\ B_{kq} = (-1)^{\sum\limits_a \lambda_a^{(k)}\delta_a}\,\vartheta(2v^{(q)};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\lambda^{(k)}\,|\,2\tau)\end{cases}$$

gesetzt ist und $\lambda_1^{(k)} \dots \lambda_\varrho^{(k)}$ unabhängig von einander die Werthe 0 und 1 annehmen.

Nach dem Multiplicationssatze der Determinanten folgt aus (1.) die Identität:

$$|C_{pq}| = \sum_{a,b} |A_{sp}|\,.\,|B_{sq}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} p,\ q=1,\ 2\\ s=a,\ b\\ a,\ b=1,\ 2,\ \dots\ r\end{smallmatrix}\right),$$

in der die Summation auf alle $\frac{r(r-1)}{2}$ Combinationen der Zahlen a, b zu erstrecken ist. Substituirt man hierin die Werthe aus (1.) und (2.), so folgt:

$$(3.)\quad \begin{cases} \vartheta(u^{(1)}+v^{(1)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(1)}-v^{(1)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(2)}+v^{(2)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(2)}-v^{(2)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\\ -\vartheta(u^{(1)}+v^{(2)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(1)}-v^{(2)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(2)}+v^{(1)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\,\vartheta(u^{(2)}-v^{(1)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\\ \qquad = \sum\limits_{a,b}(-1)^{\sum\limits_a(\lambda_a^{(a)}+\lambda_a^{(b)})\delta_a}\,|A_{sp}|\,.\,|\overline{B}_{sq}|,\end{cases}$$

wobei

$$B_{kq} = (-1)^{\sum\limits_a \lambda_a^{(k)}\delta_a}\,\overline{B}_{kq}$$

ist. Ersetzt man in dieser Formel δ und ε durch $\delta^{(k)}$ und $\varepsilon^{(k)}$ und multiplicirt mit der beliebigen Einheit

$$(-1)^{\sum\limits_a \eta_a^{(k)}\zeta_a^{(k)}},$$

so geht die rechte Seite von (3.) in

$$(4.)\quad \sum_{a,b}(E^{(k)})\,.\,|A_{sp}|\,.\,|\overline{B}_{sq}|$$

über, wenn noch

$$(-1)^{\sum\limits_a(\lambda_a^{(a)}+\lambda_a^{(b)})\delta_a^{(k)}+\eta_a^{(k)}\zeta_a^{(k)}} = (E^{(k)})$$

gesetzt wird. Nach der Definition der A_{kp} in (2.) sind diese Grössen und daher auch die aus ihnen gebildeten Determinanten $|A_{sp}|$ von $\delta^{(k)}$ und $\varepsilon^{(k)}$ unabhängig; summirt man also in (4.) über $k = 1, 2, \dots r$, so bildet den Factor von $|A_{sp}|$ die Summe:

$$(5.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=r} (E^{(k)}) \{ \vartheta(2v^{(1)};\, 0,\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(a)} \,|\, 2\tau)\, \vartheta(2v^{(2)};\, 0,\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(b)} \,|\, 2\tau) \\ \qquad - \vartheta(2v^{(1)};\, 0,\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(b)} \,|\, 2\tau)\, \vartheta(2v^{(2)};\, 0,\, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)} + \tfrac{1}{2}\lambda^{(a)} \,|\, 2\tau) \}, \end{cases}$$

und man würde den ganzen aus (4.) hervorgehenden Ausdruck erhalten, wenn man eine zweite Summation über alle $\frac{r(r-1)}{2}$ Combinationen der Zahlen a, b ausführte. Wenn daher jede der $\frac{r(r-1)}{2}$ Summen (5.) Null wird, so verschwindet der aus (4.) durch eine Summation über k hervorgehende Ausdruck und mit ihm die linke Seite von (3.), wenn man dort, wie angegeben, δ und ε durch $\delta^{(k)}$ und $\varepsilon^{(k)}$ ersetzt und über k summirt. Bedeuten nun a_h und b_h ($h = 1, 2, \dots \frac{1}{2}r$) Zahlenpaare aus der Reihe $k = 1, 2, \dots r$, die derart zusammengehören, dass

$$\varepsilon_\alpha^{(a_h)} + \lambda_\alpha^{(a)} \equiv \varepsilon^{(b_h)} + \lambda_\alpha^{(b)} \pmod{2}$$

ist, so heben sich in (5.) die Glieder paarweise auf, wenn noch

$$(E^{(a_h)}) = (E^{(b_h)})$$

oder, da diese Grössen Einheiten sind, wenn

$$(E^{(a_h)}).(E^{(b_h)}) = +1$$

ist. Substituirt man hierin den aus der obigen Congruenz hervorgehenden Werth von $\lambda_\alpha^{(a)} + \lambda_\alpha^{(b)}$, nämlich

$$\lambda_\alpha^{(a)} + \lambda_\alpha^{(b)} \equiv \varepsilon_\alpha^{(a_h)} + \varepsilon_\alpha^{(b_h)}$$

und ersetzt a_h und b_h durch a und b, so resultirt:

Führt man zur Abkürzung ein:

$$E^{(k)} = (-1)^{\sum\limits_\alpha \eta_\alpha^{(k)} \zeta_\alpha^{(k)}},$$

so wird:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=r} E^{(k)}.\vartheta(u^{(1)}+v^{(1)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(1)}-v^{(1)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(2)}+v^{(2)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(2)}-v^{(2)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)}) \\ = \sum_{k=1}^{k=r} E^{(k)}.\vartheta(u^{(1)}+v^{(2)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(1)}-v^{(2)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(2)}+v^{(1)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)})\vartheta(u^{(2)}-v^{(1)};\, \tfrac{1}{2}\delta^{(k)}, \tfrac{1}{2}\varepsilon^{(k)}), \end{cases}$$

wenn

$$(7.)\quad \sum_{\alpha}(\delta_{\alpha}^{(a)}+\delta_{\alpha}^{(b)})(\varepsilon_{\alpha}^{(a)}+\varepsilon_{\alpha}^{(b)})+\sum_{\alpha}\eta_{\alpha}^{(a)}\zeta_{\alpha}^{(a)}+\sum_{\alpha}\eta_{\alpha}^{(b)}\zeta_{\alpha}^{(b)}\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \qquad (a, b = 1, 2, \dots r)$$

ist.

Sind a, b, c drei Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots r$, so folgt aus (7.):

$$\sum_{\alpha}\{(\delta_{\alpha}^{(b)}+\delta_{\alpha}^{(c)})(\varepsilon_{\alpha}^{(b)}+\varepsilon_{\alpha}^{(c)})+(\delta_{\alpha}^{(c)}+\delta_{\alpha}^{(a)})(\varepsilon_{\alpha}^{(c)}+\varepsilon_{\alpha}^{(a)})+(\delta_{\alpha}^{(a)}+\delta_{\alpha}^{(b)})(\varepsilon_{\alpha}^{(a)}+\varepsilon_{\alpha}^{(b)})\} \equiv 0,$$

und hierdurch ist ein System *Göpel*scher Charakteristiken definirt. Setzt man noch:

$$\delta_{\alpha}^{(k)} = \mu_{\alpha}^{(k-1)}, \qquad \varepsilon_{\alpha}^{(k)} = \nu_{\alpha}^{(k-1)},$$
$$\eta_{\alpha}^{(k)} = \mu_{\alpha}^{(0)}+\mu_{\alpha}^{(k-1)}, \quad \zeta_{\alpha}^{(k)} = \nu_{\alpha}^{(0)}+\nu_{\alpha}^{(k-1)},$$

so geht (6.) auch der Form nach in das *Frobenius*sche Additionstheorem über. (Dieses Journal Bd. 89, S. 201.)

Zur Abkürzung werde nun eingeführt:

$$(8.)\quad \begin{cases} u_{\alpha}^{(1)}+v_{\alpha}^{(1)} = x_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(1)}-v_{\alpha}^{(1)} = y_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(2)}+v_{\alpha}^{(2)} = z_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(2)}-v_{\alpha}^{(2)} = w_{\alpha}; \\ u_{\alpha}^{(1)}+u_{\alpha}^{(2)} = x'_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(1)}-u_{\alpha}^{(2)} = y'_{\alpha}, & v_{\alpha}^{(1)}+v_{\alpha}^{(2)} = z'_{\alpha}, & v_{\alpha}^{(1)}-v_{\alpha}^{(2)} = w'_{\alpha}; \\ u_{\alpha}^{(1)}+v_{\alpha}^{(2)} = x''_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(1)}-v_{\alpha}^{(2)} = y''_{\alpha}, & u_{\alpha}^{(2)}+v_{\alpha}^{(1)} = z''_{\alpha}. & u_{\alpha}^{(2)}-v_{\alpha}^{(1)} = w''_{\alpha}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(9.)\quad \begin{cases} 2x'_{\alpha} = x_{\alpha}+y_{\alpha}+z_{\alpha}+w_{\alpha}, \\ 2y'_{\alpha} = x_{\alpha}+y_{\alpha}-z_{\alpha}-w_{\alpha}, \\ 2z'_{\alpha} = x_{\alpha}-y_{\alpha}+z_{\alpha}-w_{\alpha}, \\ 2w'_{\alpha} = x_{\alpha}-y_{\alpha}-z_{\alpha}+w_{\alpha}, \end{cases}$$

und:

$$(10.)\quad \begin{cases} 2x''_{\alpha} = x_{\alpha}+y_{\alpha}+z_{\alpha}-w_{\alpha}, \\ 2y''_{\alpha} = x_{\alpha}+y_{\alpha}-z_{\alpha}+w_{\alpha}, \\ 2z''_{\alpha} = x_{\alpha}-y_{\alpha}+z_{\alpha}+w_{\alpha}, \\ -2w''_{\alpha} = x_{\alpha}-y_{\alpha}-z_{\alpha}-w_{\alpha}. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun das Aggregat der Producte aus den geraden bez. ungeraden Thetafunctionen auf der linken und rechten Seite von (6.) durch S_g bez. S_u und S''_g bez. S''_u, weil diese Ausdrücke von den ungestrichenen bez. den durch (10.) definirten zweimal gestrichenen Argumentensystemen abhängen, und haben S'_g bez. S'_u die analoge Bedeutung, so geht zuvörderst (6.) in

$$S_g+S_u = S''_g+S''_u$$

über und die Vertauschung von w_α mit $-w_\alpha$ führt zu

$$S_g - S_u = S'_g - S'_u,$$

während die weitere Vertauschung von w'_α mit $-w'_\alpha$ die Gleichung

$$S''_g - S''_u = S'_g + S'_u$$

zur Folge hat. Hieraus erhält man:

$$S''_g - S'_g = S_u,$$
$$S_g - S''_g = -S'_u,$$
$$S'_g - S_g = -S''_u,$$

und durch Addition ergiebt sich:

$$(11.) \qquad S_u = S'_u + S''_u.$$

Erfüllt man die Bedingungen (7.) dadurch, dass man $\eta_\alpha^{(k)} = \zeta_\alpha^{(k)} = 0$ setzt und von den beiden Grössensystemen $\delta_1^{(k)} \dots \delta_\varrho^{(k)}$ und $\varepsilon_1^{(k)} \dots \varepsilon_\varrho^{(k)}$ das eine beliebig aber constant annimmt, während man dem anderen alle Werthe giebt, die der Congruenz

$$\sum_\alpha \delta_\alpha^{(k)} \varepsilon_\alpha^{(k)} \equiv 1 \pmod{2}$$

Genüge leisten, so folgen aus (11.) zwei Systeme von $r-1$ Gleichungen. Für $\varrho = 1$ fallen beide Gleichungen zusammen und werden, wenn man zu der σ-Function übergeht, mit derjenigen Gleichung identisch, welche Herr *Weierstrass* in seinen Universitäts-Vorlesungen entwickelt hat. (Vgl. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, S. 505). Einen directen Beweis dieser für $\varrho = 1$ hervorgehenden Gleichung hat neuerdings Herr *Enneper* (Göttinger Nachrichten 1883, S. 177) aus *Jacobi*schen Formeln abgeleitet. Für $\varrho = 2$ erhält man dasjenige Formelsystem, welches Herr *Frobenius* und ich (dieses Journal Bd. 96, S. 107 und S. 326) gegeben haben. (Vgl. auch *Enneper* a. a. O. S. 180).

Vertauscht man in (6.) $u_\alpha^{(2)}$ und $v_\alpha^{(2)}$, beachtet (8.) und genügt den Bedingungen (7.) dadurch, dass man $\eta_\alpha^{(k)} = \zeta_\alpha^{(k)} = 0$ setzt und von den Systemen $\delta_1^{(k)} \dots \delta_\varrho^{(k)}$ und $\varepsilon_1^{(k)} \dots \varepsilon_\varrho^{(k)}$ das eine constant wählt, während man dem anderen alle r möglichen Werthe beilegt, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen für $\varrho = 1$ die von *Jacobi* (Ges. Werke. Bd. 1, S. 507) und für $\varrho = 2$ die von Herrn *Rosenhain* (Preisschrift S. 413 und 443 flgd.) abgeleiteten Formeln hervorgehen. (Vgl. dieses Journal Bd. 94, S. 83 flgd.). Im Besonderen ergeben sich für die specielle Annahme $\delta_\alpha = 0$ diejenigen Fundamentalformeln, welche den Ausgangspunkt der *Jacobi*schen und *Rosenhain*schen Untersuchungen bilden.

Für die Thetafunctionen mehrerer Argumente ist diejenige aus (6.) sich ergebende specielle Formel von besonderer Wichtigkeit, welche nach Vermehrung der Argumente $u_\alpha^{(1)}$ und $v_\alpha^{(1)}$ um $\frac{1}{2}\sum_\beta \tau_{\alpha\beta}\zeta_\alpha$ und Vertauschung von $u_\alpha^{(2)}$ und $v_\alpha^{(2)}$ aus der den Bedingungen (7.) genügenden Annahme

$$\delta_\alpha^{(k)} = \eta_\alpha^{(k)}, \quad \varepsilon_\alpha^{(k)} = 0, \quad \zeta_\alpha^{(k)} = 0$$

hervorgeht. Diese Formel lautet:

$$(12.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=r} (-1)^{\sum_\alpha \eta_\alpha^{(k)}\zeta_\alpha} \vartheta(x;\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ 0)\vartheta(y;\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ 0)\vartheta(z;\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ 0)\vartheta(w;\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ 0) \\ = \sum_{k=1}^{k=r} \vartheta(x';\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(y';\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(z';\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(w';\ \tfrac{1}{2}\eta^{(k)},\ \tfrac{1}{2}\zeta). \end{cases}$$

Giebt man nämlich in derselben ζ alle r möglichen Werthe und addirt die entstehenden r Gleichungen, so treten rechts sämmtliche r^2 vorhandenen Thetafunctionen auf, während links alle Glieder sich fortheben, ausgenommen dasjenige, in welchem die η_α sämmtlich den Werth 0 haben. Daraus folgt:

$$2^\varrho\vartheta(x;\ 0,\ 0)\vartheta(y;\ 0,\ 0)\vartheta(z;\ 0,\ 0)\vartheta(w;\ 0,\ 0)$$
$$= \Sigma\vartheta(x';\ \tfrac{1}{2}\eta,\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(y';\ \tfrac{1}{2}\eta,\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(z';\ \tfrac{1}{2}\eta,\ \tfrac{1}{2}\zeta)\vartheta(w';\ \tfrac{1}{2}\eta,\ \tfrac{1}{2}\zeta),$$

wobei die Summation rechts sich auf alle r^2 Werthe η, ζ erstreckt. Diese Formel, welche sich als die naturgemässe Verallgemeinerung der *Jacobi-Rosenhain*schen darstellt, ist diejenige, welche Herr *Prym* als *Riemann*sche Thetaformel bezeichnet hat. Herr *Prym* wählt dieselbe zum Ausgangspunkt seiner eleganten Entwickelungen und leitet aus ihr namentlich (Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel etc. Leipzig 1882, S. 94 flgd.) dasjenige Additionstheorem her, welches als Verallgemeinerung der von den Herren *Weber* (Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876, S. 37) und *Nöther* (Math. Ann. Bd. 14, S. 248) für $\varrho = 3$ und $\varrho = 4$ gefundenen Formeln die Herren *Stahl* (dieses Journal Bd. 88, S. 127), *Frobenius* (dieses Journal Bd. 89 S. 219) und *Nöther* (Math. Ann. Bd. 16, S. 327) gegeben haben. Wegen der Wichtigkeit, die hierdurch Formel (12.) erlangt, will ich für dieselbe noch eine unmittelbar aus (3.) hervorgehende Ableitung entwickeln, um dadurch gleichzeitig zu den mannigfachen Beweisen, die Herr *Prym* für die *Riemann*sche Thetaformel gegeben hat (vgl. a. a. O. Abhandlung I, dieses Journal Bd. 93, S. 124 und Acta math. Bd. 3, S. 201), einen neuen einfachen hinzuzufügen. Ersetzt man nämlich in (3.) δ_α durch $\delta_\alpha^{(k)}$ und giebt $\delta_1^{(k)}\dots\delta_\varrho^{(k)}$ alle r möglichen Werthe, so unterscheiden sich die rechten Seiten der entstehenden Gleichungen wegen (2.) nur durch

die Vorzeichen der einzelnen Glieder. Da die Vorzeichen jedes Gliedes aber ebenso oft positiv wie negativ werden, so verschwindet die rechte Seite, wenn man alle Gleichungen addirt. Vertauscht man in der so hervorgehenden Gleichung $u_a^{(2)}$ und $v_a^{(2)}$, vermehrt $u_a^{(1)}$ und $v_a^{(1)}$ um $\frac{1}{2}\sum_\beta \tau_{a\beta}\zeta_a$, ersetzt $\varepsilon_a+\zeta_a$ durch ζ_a und beachtet (8.), so erhält man (12.) und daraus, wie oben gezeigt, die *Riemann*sche Thetaformel.

Zum Schluss bemerke ich, dass die hier entwickelten Resultate ungeändert bleiben, wenn man statt der durch (1.) definirten Thetafunction diejenige allgemeine *Weierstrass*sche Thetafunction in Anwendung bringt, welche Herr *Schottky* (Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880) benutzt.

Berlin, den 27. März 1884.

Ueber optische Strahlensysteme.

(Von Herrn *M. Blasendorff.*)

Ein erstes und ein zweites Medium seien getrennt durch eine Fläche, deren Gleichung ist:

$$(1.)\qquad f_{12}(x_{12},\ y_{12},\ z_{12}) = 0,$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der Fläche bedeuten.

Die Wellenfläche des ersten Mediums sei gegeben durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad f_1(\varrho_1\xi_1,\ \varrho_1\eta_1,\ \varrho_1\zeta_1) = 0,$$

die des zweiten durch die Gleichung:

$$(3.)\qquad f_2(\varrho_2\xi_2,\ \varrho_2\eta_2,\ \varrho_2\zeta_2) = 0.$$

Hierin bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die Leitstrahlen, ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 die Cosinus ihrer Richtung, so dass, bei Annahme einer gewissen Zeiteinheit, ϱ_1 und ϱ_2 direct die Geschwindigkeit angeben, welche das Licht in ihrer Richtung in dem betreffenden Medium hat.

Ein Lichtstrahl, der vom Punkte (x_{01}, y_{01}, z_{01}) im ersten Medium in der Richtung (ξ_1, η_1, ζ_1) ausgeht, treffe die Trennungsfläche im Punkte (x_{12}, y_{12}, z_{12}) und lege bis zu ihr die Strecke r_1 zurück. Der gebrochene Strahl habe die Richtung (ξ_2, η_2, ζ_2) und lege bis zu einem Punkte (x_{23}, y_{23}, z_{23}) im zweiten Medium die Strecke r_2 zurück. Dann bestehen die Gleichungen:

$$(4.)\qquad x_{12} = x_{01}+r_1\xi_1,\quad y_{12} = y_{01}+r_1\eta_1,\quad z_{12} = z_{01}+r_1\zeta_1;$$

$$(5.)\qquad x_{23} = x_{12}+r_2\xi_2,\quad y_{23} = y_{12}+r_2\eta_2,\quad z_{23} = z_{12}+r_2\zeta_2.$$

Aus dem Princip der schnellsten Ankunft folgt:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_1}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1}-\dfrac{A_2}{\Sigma A_2\varrho_2\xi_2} = \mu A_{12}, \qquad \dfrac{B_1}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1}-\dfrac{B_2}{\Sigma A_2\varrho_2\xi_2} = \mu B_{12}, \\ \dfrac{C_1}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1}-\dfrac{C_2}{\Sigma A_2\varrho_2\xi_2} = \mu C_{12}. \end{cases}$$

Das Zeichen Σ bedeutet, jetzt wie später, dass dem hingeschriebenen

Summanden zwei andere Summanden hinzuzufügen sind, welche für die y- und z-Axe dieselbe Bedeutung haben, wie das hingeschriebene Glied für die x-Axe; μ ist ein unbestimmter Factor, und für die Grössen A, B, C bestehen die Gleichungen:

$$(7.)\qquad \Sigma A_1 d(\varrho_1\xi_1) = 0,\quad \Sigma A_2 d(\varrho_2\xi_2) = 0,\quad \Sigma A_{12} dx_{12} = 0.$$

Die Gleichungen (6.) gelten auch für die Reflexion; nur ist dann die Wellenfläche des ersten Mediums auch als solche des zweiten Mediums zu betrachten. Sind die Grössen x_{01}, y_{01}, z_{01}, ξ_1, η_1, ζ_1 als Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u, v gegeben, wodurch im ersten Medium ein Strahlensystem bestimmt wird, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (1.)—(7.) die Bestimmungsstücke des aus diesem Strahlensysteme durch Brechung entstandenen zweiten Strahlensystems als Functionen von u, v berechnen. Aus der Herleitung dieser Functionen ergiebt sich, dass der zu einem Werthpaare (u, v) gehörende Strahl des zweiten Systems demjenigen Strahle im ersten System, welcher zu demselben Werthpaare (u, v) gehört, in der Weise entspricht, dass er aus diesem durch Brechung entstanden ist.

Addirt man die der Reihe nach mit dx_{12}, dy_{12}, dz_{12} multiplicirten Gleichungen (6.), bringt dann das zweite Glied der linken Seite auf die rechte Seite und berücksichtigt die dritte der Gleichungen (7.), so erhält man:

$$(8.)\qquad \frac{\Sigma A_1 dx_{12}}{\Sigma A_1 \varrho_1 \xi_1} = \frac{\Sigma A_2 dx_{12}}{\Sigma A_2 \varrho_2 \xi_2}.$$

Aus den Gleichungen (4.) folgt:

$$(9.)\qquad \Sigma A_1 dx_{12} = \Sigma A_1 dx_{01} + \Sigma A_1 d(r_1\xi_1).$$

Nun ist:

$$\Sigma A_1 d(r_1\xi_1) = \Sigma A_1 d\Big(\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\varrho_1\xi_1\Big) = d\Big(\frac{r_1}{\varrho_1}\Big)\Sigma A_1\varrho_1\xi_1 + \frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\Sigma A_1 d(\varrho_1\xi_1),$$

oder wegen der ersten der Gleichungen (7.)

$$\Sigma A_1 d(r_1\xi_1) = d\Big(\frac{r_1}{\varrho_1}\Big)\cdot\Sigma A_1\varrho_1\xi_1.$$

Daher lässt sich Gleichung (9.) schreiben:

$$(10.)\qquad \frac{\Sigma A_1 dx_{12}}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1} = \frac{\Sigma A_1 dx_{01}}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1} + d\Big(\frac{r_1}{\varrho_1}\Big).$$

Unter Benutzung von (10.) wird (8.):

$$(11.)\qquad \frac{\Sigma A_1 dx_{01}}{\Sigma A_1\varrho_1\xi_1} + d\Big(\frac{r_1}{\varrho_1}\Big) = \frac{\Sigma A_2 dx_{12}}{\Sigma A_2\varrho_2\xi_2}.$$

Ist die Fläche (x_{23}, y_{23}, z_{23}) die Trennungsfläche des zweiten und eines dritten Mediums, so erhält man zwischen den Bestimmungsstücken des zweiten und des aus diesem durch Brechung entstehenden dritten Strahlensystems eine ähnliche Gleichung wie Gleichung (11.) und so fort.

Sind n Medien vorhanden, und legen die Strahlen des n^{ten} Strahlensystems im n^{ten} Medium die Strecke r_n bis zur Fläche $(x_{n,n+1}, y_{n,n+1}, z_{n,n+1})$ zurück, wo r_n als eine beliebige Function von u, v gewählt werden kann, so bestehen n Gleichungen von der Form der Gleichung (11.). Addirt man diese, so erhält man:

$$(12.)\qquad \frac{\Sigma A_1 dx_{01}}{\Sigma A_1 \varrho_1 \xi_1} + \sum_{s=1}^{n} d\left(\frac{r_s}{\varrho_s}\right) = \frac{\Sigma A_n dx_{n,n+1}}{\Sigma A_n \varrho_n \xi_n}.$$

Diese Gleichung drückt die Beziehungen aus, welche zwischen zwei Strahlensystemen bestehen, von denen das eine durch die verschiedensten Reflexionen und Brechungen in Medien mit beliebiger Wellenfläche aus dem anderen hervorgegangen ist. Sie gilt auch noch, wenn n unendlich gross wird, d. h. wenn das Licht durch nicht homogene Medien hindurchgeht; denn jedes nicht homogene Medium kann man sich durch unendlich viele unendlich schmale Streifen zerlegt denken und jeden dieser Theile als ein homogenes Medium ansehen.

Besteht nun das erste Strahlensystem aus den Strahlen, welche von einem leuchtenden Punkte ausgehen, und nimmt man diesen Punkt zum Ausgangspunkt der Strahlen, so ist $dx_{01} = dy_{01} = dz_{01} = 0$, und Gleichung (12.) lautet:

$$(13.)\qquad \frac{\Sigma A_n dx_{n,n+1}}{\Sigma A_n \varrho_n \xi_n} = d\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{r_s}{\varrho_s}\right).$$

Bestimmt man r_n so, dass die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, dass also:

$$(14.)\qquad \sum_{s=1}^{n} \frac{r_s}{\varrho_s} = c$$

wird, wo c die Integrationsconstante bedeutet, so ist:

$$(15.)\qquad \Sigma A_n dx_{n,n+1} = 0.$$

Es giebt aber $\frac{r_s}{\varrho_s}$ die Zeit an, in welcher ein Lichtstrahl das s^{te} Medium durchläuft, und daher sind die Flächen $(x_{n,n+1}, y_{n,n+1}, z_{n,n+1})$, welche durch die Gleichung (14.) bestimmt sind, zufolge ihrer Definition so beschaffen, dass alle von dem das Strahlensystem erzeugenden leuchtenden Punkte zu

gleicher Zeit ausgehenden Strahlen zu gleicher Zeit eine jede dieser Flächen treffen, oder dass eine vom leuchtenden Punkte zu irgend einer Zeit ausgehende Lichtbewegung sich im letzten Medium zu irgend einer Zeit bis zu einer bestimmten der durch die Gleichung (14.) definirten Flächen fortgepflanzt hat. In dem *Kirchhoff-Helmholtz*schen Sinne würde daher diesen Flächen der Name „Wellenflächen" zu geben sein. Um aber eine Verwechselung mit denjenigen Flächen, welche als „Wellenfläche eines Mediums" bezeichnet worden sind, zu vermeiden, will ich die durch die Gleichung (14.) definirten Flächen *„Flächen gleicher Ankunft"* nennen, wo *„gleich"* im Sinne von „gleichzeitig" zu nehmen ist.

Von diesen Flächen sagt nun (15.) aus, dass die Cosinus der Richtung ihrer Normalen proportional sind mit A_n, B_n, C_n, also gleich den Cosinus der Richtung der Normalen der Wellenfläche des n^{ten} Mediums. Daher haben wir den Satz:

I. *Bei optischen Strahlensystemen sind die Strahlen gegen die Flächen gleicher Ankunft nach allen Richtungen hin ebenso geneigt, wie die zu ihnen parallelen Leitstrahlen der Wellenfläche des Strahlensystems gegen diese.*

Es ergeben sich unmittelbar noch folgende Sätze:

II. *Bei optischen Strahlensystemen, deren Wellenfläche eine Kugel ist, stehen die Strahlen des Systems normal auf den Flächen gleicher Ankunft.*

III. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Strahlensystem in einem isotropen Medium optisch darstellbar sei, ist, dass seine Strahlen Normalen einer Fläche sind,*

denn alsdann ist Gleichung (13.) immer erfüllt. — Der erste der ausgesprochenen Sätze ist ein Analogon des *Malus-Dupin*schen Satzes für optische Strahlensysteme in Medien mit beliebiger Wellenfläche; der dritte eine Erweiterung desselben Satzes in so fern, als die Medien, welche das Licht durchlaufen muss, bevor es in ein isotropes Medium zurückkehrt, nicht nur isotrope oder krystallinische, sondern Medien mit ganz beliebiger Wellenfläche sein können.

Zufolge der Gleichung (13.) ist $\frac{\Sigma A_n dx_{n,n+1}}{\Sigma A_n \varrho_n \xi_n}$ das vollständige Differential einer Function von u, v, wenn das n^{te} Strahlensystem ein optisch darstellbares ist, und diese Bedingung ist auch hinreichend, da sich, wenn sie erfüllt ist, immer eine brechende Fläche bestimmen lässt, so dass allen Bedingungen genügt wird. Dies deckt sich, wie ich in meiner Disser-

tation*) gezeigt habe, mit dem Inhalte des Satzes, welchen Herr *Kummer***) ohne Beweis mitgetheilt hat, und welcher lautet:

„Jedes unendlich dünne optische Strahlenbündel im Innern eines homogenen, durchsichtigen Mittels hat die Eigenschaft, dass seine beiden Focalebenen aus der diesem Mittel angehörenden Wellenfläche des Lichtes, deren Mittelpunkt in der Axe des Strahlenbündels liegend angenommen wird, zwei Curven ausschneiden, welche sich in conjugirten Richtungen schneiden. Auch ist jedes Strahlenbündel, welches diese Eigenschaft hat, wirklich optisch darstellbar.“

Unter conjugirten Richtungen auf der Wellenfläche werden die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser des dem betreffenden Punkt der Wellenfläche angehörenden, unendlich kleinen *Dupin*schen Kegelschnittes, der Indicatrix, verstanden, welcher Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem an dieser Stelle die Fläche convex-convex oder concav-convex ist.

*) Ueber die Beziehungen zwischen zwei allgemeinen Strahlensystemen, von welchen das eine durch die verschiedensten Reflexionen und Brechungen in Medien mit beliebiger Wellenfläche aus dem anderen hervorgegangen ist, und die hieraus für optisch darstellbare Strahlensysteme sich ergebenden Folgerungen. Inaugural-Dissertation. Berlin 1883.

**) Monatsberichte der Königlichen Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1860 pag. 470.

Berlin 1884.

Ueber eine gewisse Curve des dritten Grades.

(Hierzu Figurentafel II.)

(Von Herrn *O. Hermes.*)

§ 1.

Der Ort eines Punktes P, von dessen Verbindungslinien mit den Ecken eines gegebenen Dreiecks zwei mit der dritten gleiche Winkel bilden, ist eine Curve des dritten Grades und der vierten Klasse.

Magnus hat diesen Ort in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833" behandelt, mit grosser Genauigkeit, nämlich durch Berechnung von 35 Werthen der Polarcoordinaten von P, von denen er zwölf namentlich anführt, die Form des Ortes für eine besondere Lage des Dreiecks bestimmt, jedoch, soweit mir bekannt ist, weitere Eigenschaften des Ortes, ausser soweit sie den Doppelpunkt desselben und die Gleichung seiner Asymptote betreffen, nicht angegeben. Auch anderswo habe ich den Ort nicht behandelt gefunden, obschon eine eingehende Untersuchung über ihn leicht zu Ergebnissen eigenthümlicher Art führt, unter denen die Eigenschaften seiner Tangenten hervorzuheben sind.

Im Folgenden soll das gegebene Dreieck durch ABC als *Fundamentaldreieck* bezeichnet werden, $AB = c$ als die Basis desselben, C als die Spitze, so dass unsere Ortscurve kürzer darzustellen ist als

der Ort eines Punktes P, von dem aus die Seiten AC und BC des Dreiecks ABC gleich lang erscheinen.

Es ergiebt sich hieraus sofort, dass nur in der Richtung der Verbindungslinie der Spitze C mit dem Mittelpunkt M der Basis ein Punkt der Curve im Unendlichen liegen kann, d. h. dass die Curve nur eine einzige Asymptote haben kann, und dass diese parallel der Linie CM sein muss. Für diese Linie CM als die x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Spitze C als Anfangspunkt seien die Endpunkte der Basis

A und *B* bezüglich durch (ξ_1, η) und $(\xi_2, -\eta)$ dargestellt, so ergiebt sich für die gleichen Winkel $APC = BPC = u$:

$$\tang u = \frac{\xi_1 y + \eta x}{x(x-\xi_1)+y(y-\eta)} = -\frac{\xi_2 y - \eta x}{x(x-\xi_2)+y(y+\eta)},$$

und daraus als die *Gleichung des Ortes*

$$\text{(I.)} \quad (\xi_1+\xi_2)y(x^2+y^2)-2(\xi_1\xi_2+\eta^2)xy-(\xi_1-\xi_2)\eta(x^2-y^2) = 0.$$

Um *beliebig viele Punkte* desselben *zu erhalten*, beschreibe man (Fig. 1) um die Spitze *C* als Mittelpunkt einen beliebigen Kreis und an diesen von den Endpunkten der Basis *A* und *B* aus die Tangentenpaare, so durchschneiden sich diese in vier Punkten *P* des Ortes; denn für jeden dieser Punkte *P* ist Winkel $APC = BPC$. Es ist hierbei zu bemerken, dass, wenn man dieser Construction entsprechend darzustellen sucht den

Ort der Schnittpunkte der Tangentenpaare, die sich von zwei gegebenen Punkten A und B aus an ein System von concentrischen Kreisen um C legen lassen,

sich bei Zugrundelegung der oben angenommenen Coordinaten, als Ortscurve eine Curve des vierten Grades ergiebt, welche jedoch bei genauerer Untersuchung in unsere Curve (I.) und eine gerade Linie, nämlich die Basis *AB*, zerfällt, wie sich sofort ergiebt, wenn man die Coordinaten so wählt, dass *AB* mit einer der Coordinatenaxen zusammenfällt. Ich will übrigens hinzufügen, dass ich von den vielfachen harmonischen Eigenschaften, welche unsere Curve, der zuletzt erwähnten Entstehungsweise entsprechend, besitzt, hier absehe. —

§ 2.

Aus der Gleichung (I.) unserer Curve lässt sich unmittelbar schliessen, dass der Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. die Spitze des Fundamentaldreiecks, auf der Curve liegt und zwar als ein *Doppelpunkt*, in welchem sich zwei reelle Curvenäste rechtwinklig durchschneiden, — nebenbei sei bemerkt, dass die Tangenten an die beiden Curvenäste in *C* die Halbirungslinien sind des Winkels *ACB* (§ 4), — ferner dass die Curve durch die Endpunkte der Basis *A* und *B* geht und dass, wie oben schon hervorgehoben ist, *die Asymptote der Curve* parallel der x-Axe verläuft. Um diese darzustellen, sowie weitere Eigenschaften der Curve, deren Gleichung in Beziehung auf x nur quadratisch ist, herzuleiten, bringe man die Gleichung der Curve in

die Form

$$(\text{II.})\qquad Lx^2-2Mxy+Ny^2 = 0,$$

wo

$$(\text{III.})\qquad \begin{cases} L = (\xi_1+\xi_2)y-(\xi_1-\xi_2)\eta, \\ M = \xi_1\xi_2+\eta^2, \\ N = (\xi_1+\xi_2)y+(\xi_1-\xi_2)\eta \end{cases}$$

ist.

Dieser Darstellung entsprechend ist $L = 0$ die *Gleichung der Asymptote;* andererseits ergiebt sich, dass die Curve durch die y-Axe, d. i. durch das von der Spitze C auf die Asymptote gefällte Loth, ausser in C noch in einem Punkte E durchschnitten wird, dessen Ordinate y durch $N = 0$ bestimmt ist, also gleich ist dem Abstand der Asymptote von C, d. h.

die y-Axe wird durch die Asymptote und die Curve in gleichen Entfernungen von der Spitze des Fundamentaldreiecks durchschnitten.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der y-Axe mit der Basis AB durch E_1 (Fig. 2), so ergiebt sich, weil der Natur unserer Ortscurve entsprechend CE die Halbirungslinie ist des Winkels BEA,

$$AE:BE = AE_1:BE_1,$$

woraus der Punkt E auf der Curve und demnach auch die Asymptote zu construiren sind.

Weil die Asymptote parallel der x-Axe ist, ergeben alle dieser Axe parallelen Linien mit der Curve nur je zwei Schnittpunkte, welche, entsprechend der Gleichung (II.) der Curve, reell, zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem die Discriminante dieser Gleichung

$$(\text{IV.})\qquad \Delta = M^2-LN = (\xi_1^2+\eta^2)+(\xi_2^2+\eta^2)-(\xi_1+\xi_2)^2y^2$$

grösser, gleich oder kleiner als Null ist. Es liegt also die Curve zwischen den beiden der Asymptote parallelen Tangenten, welche durch $\Delta = 0$ dargestellt sind, d. h. deren Abstand y_0 vom Doppelpunkt C ausgedrückt ist durch

$$(\xi_1+\xi_2)^2y_0^2 = (\xi_1^2+\eta^2)(\xi_2^2+\eta^2),$$

d. i.

$$y_0 = \pm\frac{CA.CB}{2CM};$$

zugleich ergiebt sich hieraus, dass die sich in C durchschneidenden Aeste der Curve auf der einen Seite der x-Axe eine Schleife bilden.

§ 3.

Die *zweiten Schnittpunkte* der durch die Endpunkte der Basis parallel zur Asymptote gelegten Linien mit der Curve seien (ξ_1', η) und $(\xi_2', -\eta)$, so ergeben sich für die Abscissen derselben die Werthe:

$$\text{(V.)} \qquad \xi_1' : \eta = \eta : \xi_1 \quad \text{und} \quad \xi_2' : \eta = \eta : \xi_2,$$

d. h. die Ordinate ist die mittlere Proportionale zwischen den Abscissen der Schnittpunktepaare der zur Asymptote parallelen Sehnen durch A und B, oder in anderer Ausdrucksweise:

Die durch die Endpunkte A und B der Basis und die Spitze C gelegten Kreise, welche in C die y-Axe berühren, durchschneiden die Curve je in einem neuen Punkte A_1 und B_1, so dass AA_1 und BB_1 parallel sind der Asymptote der Curve.

Dieser Satz gestattet eine Verallgemeinerung auf die Schnittpunktepaare A und A_1, B und B_1 von jeden zwei in gleichen Abständen von C parallel zur Asymptote gelegten Linien mit der Curve: es ist auch für diese, bei passender Auswahl, AC senkrecht B_1C und BC senkrecht A_1C und umgekehrt, d. h.

Jeder die y-Axe in C berührende Kreis durchschneidet die Curve in zwei Punkten, deren Verbindungslinie ein Durchmesser des Kreises ist.

In der That seien die Parallelen in den Abständen y_1 und $-y_1$ von der x-Axe gezogen und durch L_1, N_1 und Δ_1 die Werthe von L, N und Δ ((III.) und (IV.)) bezeichnet, wenn man in ihnen y durch y_1 ersetzt; ferner seien die Abscissen der Schnittpunkte A und A_1, B und B_1 der Parallelen mit der Curve bezüglich x_1 und x_1', x_2 und x_2', so ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{(M+\sqrt{\Delta_1})y_1}{L_1}, \quad x_1' = \frac{(M-\sqrt{\Delta_1})y_1}{L_1},$$

$$x_2 = \frac{(M+\sqrt{\Delta_1})y_1}{N_1}, \quad x_2' = \frac{(M-\sqrt{\Delta_1})y_1}{N_1},$$

und daraus, weil $M^2 - \Delta_1^2 = L_1 N_1$ (IV.):

$$\text{(VI.)} \qquad x_1 . x_2' = y_1^2 \quad \text{und} \quad x_2 . x_1' = y_1^2,$$

ganz dieselbe Eigenschaft wie (V.). Es werden also, entsprechend den eben dargestellten Gleichungen (VI.), die Punkte A und B_1, sowie A_1 und B die Endpunkte der Durchmesser zweier Kreise, welche sich in C berühren.

§ 4.

Um nunmehr die Frage zu erledigen, *welche Beziehung die Punktepaare A und B, sowie A_1 und B_1 selbst zu einander haben*, möge zunächst der den Gleichungen (V.) entsprechende specielle Fall ins Auge gefasst werden, bei welchem A und B die Endpunkte der Basis sind. Führt man an Stelle der Coordinaten (ξ_1, η) und $(\xi_2, -\eta)$ dieser Punkte die der beiden Punkte A_1 und B_1 ein, nämlich (ξ'_1, η) und $(\xi'_2, -\eta)$, wie sie sich aus den Gleichungen (V.) ergeben, so erhält man:

$$\xi_1+\xi_2 = \delta(\xi'_1+\xi'_2); \qquad \xi_1-\xi_2 = -\delta(\xi'_1-\xi'_2);$$
$$\xi_1\xi_2+\eta^2 = \delta(\xi'_1\xi'_2+\eta^2), \text{ wo } \xi'_1\xi'_2 = \delta\eta^2$$

ist, d. h. wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (III.) für L, M, N einführt, ändern sich diese nur insoweit, dass ξ_1 und ξ_2 durch ξ'_1 und ξ'_2 ersetzt werden und in ihnen der gemeinschaftliche Factor δ enthalten ist; darum erfährt auch die Gleichung der Curve (II.) keine weitere Aenderung, als dass ξ'_1 und ξ'_2 an die Stelle von ξ_1 und ξ_2 treten, d. h.

Die Basis AB des Fundamentaldreiecks kann durch A_1B_1 als Basis ersetzt werden.

Ebenso können allgemein von den vier Punkten, in denen die Curve durch irgend zwei, in gleichem Abstande vom Doppelpunkt C, parallel der Asymptote gelegte Geraden geschnitten wird, zwei Paar als Endpunkte der Basis eines neuen Fundamentaldreiecks gewählt werden. Denn ist auf der Curve irgend ein bestimmter Punkt $A_1(x_1, y_1)$ gegeben, so dass also

$$L_1x_1^2-2Mx_1y_1+N_1y_1^2 = 0$$

ist, wo L_1, M und N_1 die frühere Bedeutung haben, so gehören zu diesem Punkte in gleicher Entfernung von der x-Axe, aber auf der entgegengesetzten Seite derselben, zwei Punkte B_2 und B'_2, deren Abscissen x_2 und x'_2 die Wurzeln sind der quadratischen Gleichung

$$N_1x_2^2-2Mx_2y_1+L_1y_1^2 = 0,$$

denn in der That geht beim Vertauschen von y_1 mit $-y_1$ der Ausdruck L_1 in N_1 und umgekehrt über. Demnach sind die Wurzelsysteme der beiden letzten quadratischen Gleichungen:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{M\pm\sqrt{\Delta_1}}{L_1} \quad \text{und} \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{M\pm\sqrt{\Delta_1}}{N_1};$$

folglich ergiebt sich durch Verbindung derjenigen beiden Einzelwurzeln,

welche bezüglich einem oberen und einem unteren Zeichen von $\sqrt{\Delta_1}$ zugehören:

$$\frac{x_1 x_2}{y_1^2} = \frac{M^2-\Delta_1}{L_1 N_1} = 1,$$

d. i. unser früheres Resultat (VI.), nach welchem die Schnittpunkte bei einer gewissen Auswahl die Endpunkte sind der Durchmesser zweier sich in C berührenden Kreise. Wenn man dagegen die oberen Vorzeichen von $\sqrt{\Delta_1}$ mit einander verbindet, so ergiebt sich:

$$\frac{x_1+x_2}{y_1} = \varepsilon(\xi_1+\xi_2)y_1; \qquad \frac{x_1-x_2}{y_1} = \varepsilon(\xi_1-\xi_2)\,\eta;$$

$$\frac{x_1 x_2+y_1^2}{y_1^2} = \varepsilon(\xi_1\xi_2+\eta^2), \quad \text{wo} \quad L_1 N_1.\varepsilon = 2(M+\sqrt{\Delta_1});$$

folglich, wenn man die hieraus hervorgehenden Werthe von $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ und $\xi_1\xi_2+\eta^2$ in die Gleichung (II.) unserer Curve einsetzt, so bleibt dieselbe, nach Beseitigung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors ε, ungeändert, nur dass an die Stelle von (ξ_1, η) und $(\xi_2, -\eta)$ bezüglich (x_1, y_1) und $(x_2, -y_1)$ eingetreten sind. Das gleiche Resultat ergiebt sich, wenn man statt der oberen Vorzeichen von $\sqrt{\Delta_1}$ die unteren einführt. Man hat also den Satz:

Von den vier Schnittpunkten irgend zweier in gleichen Abständen von der Spitze C parallel zur Asymptote gezogenen Geraden mit der Curve lassen sich zweimal zwei als Endpunkte der Basis eines Fundamentaldreiecks wählen.

Die Basis des Fundamentaldreiecks ist demnach auf der Curve in der Weise verschiebbar, dass durch ihren Mittelpunkt die durch die Spitze C parallel zur Asymptote gezogene Linie beschrieben wird. Ausserdem ergiebt sich aus den letzten Gleichungen durch Division:

$$\frac{(x_1-x_2)y_1}{x_1 x_2+y_1^2} = \frac{(\xi_1-\xi_2)\eta}{\xi_1\xi_2+\eta^2},$$

aus welcher Gleichung zu entnehmen ist, dass die Differenzen der Winkel, welche die Seiten AC und BC, sowie A_1C und B_1C der Fundamentaldreiecke ABC und A_1B_1C mit der x-Axe bilden, einander gleich sind, also auch die Winkel A_1CA und B_1CB selbst, d. h.

die Winkel an der Spitze C aller Fundamentaldreiecke ABC, A_1B_1C, ... haben dieselben Halbirungslinien,

nämlich die Tangenten der in C zusammenstossenden Aeste der Curve.

§ 5.

Eine scheinbare Ausnahme von dem ersten der beiden zuletzt dargestellten Sätze tritt ein, wenn von den beiden Parallelen die eine die Asymptote selbst ist, weil dann der eine Schnittpunkt derselben mit der Curve ins Unendliche zu liegen kommt. Wir haben bereits (§ 2) gesehen, dass alsdann von den beiden Schnittpunkten der anderen Parallelen der eine senkrecht unter dem Schnittpunkt der Asymptote mit der y-Axe liegt, — der zugehörige Kreis (§ 3) degenerirt also zur y-Axe selbst, — die Verbindungslinien des Doppelpunktes C mit den zweiten Schnittpunkten von Asymptote und Parallele mit der Curve stehen auf einander senkrecht, wodurch der Schnittpunkt der Asymptote mit der Curve sich leicht construiren lässt. Dieser Schnittpunkt lässt sich auch als Endpunkt einer Basis verwerthen.

Von besonderem Interesse, zumal für die Construction (§ 1), ist ferner der Fall, wo die beiden Parallelen zur Asymptote Tangenten der Curve werden, also die Punkte A und A_1, sowie B und B_1 zusammenfallen. Alsdann vereinigen sich die Sätze der §§ 3 und 4 zu einem einzigen, indem *das Fundamentaldreieck bei C rechtwinklig wird* (Fig. 3). Während jedem bei C schiefwinkligen Dreieck ABC ein zweites Fundamentaldreieck A_1B_1C entspricht, bei gleichem Abstande der Endpunkte der Basis von der Asymptote (§ 4); und zwar weil die Winkel ACB_1 und A_1CB rechte Winkel sind, ein Dreieck A_1B_1C, für welches $\sin A_1CB_1 = \sin ACB$ ist, ist das bei C rechtwinklige Fundamentaldreieck in jeder Curve nur ein einziges. Also:

Für jede Ortscurve (vergl. § 6) *giebt es ein einziges bei C rechtwinkliges Fundamentaldreieck, nämlich dasjenige, bei dem die Projection der Basis auf eine zur Asymptote senkrechte Richtung möglichst gross ist.*

Legt man dieses rechtwinklige Dreieck als Fundamentaldreieck zu Grunde, so ist eine Curve vollständig bestimmt durch die Hypotenuse $AB = c$ und den Winkel 2α, den AB mit der Axe CM bildet, und durch Einführung dieser Bestimmungsstücke an Stelle von ξ_1, ξ_2 und η, nämlich

$$\xi_1 = c.\cos\alpha^2, \quad \xi_2 = c.\sin\alpha^2, \quad 2\eta = c.\sin 2\alpha,$$

wird die *Gleichung der Curve:*

$$\text{(VII.)} \qquad (x^2+y^2)y - c\sin 2\alpha^2.xy - \frac{c}{4}\sin 4\alpha(x^2-y^2) \;=\; 0.$$

Wählt man die Katheten des Fundamentaldreiecks $BC = a$, $CA = b$ in Rich-

tung der x- und y-Axe, so wird die Gleichung der Curve:

$$(ay-bx)(x^2+y^2)+ab(x^2-y^2) = 0$$

und für Polarcoordinaten:

$$2\varrho\cos(\alpha+\varphi) = c\sin 2\alpha.\cos 2\varphi;$$

endlich, wenn man unter Beibehaltung der zuletzt gewählten Axenrichtung einen der Endpunkte der Basis, z. B. B, als Anfangspunkt nimmt, für Polarcoordinaten:

$$(\varrho^2+a^2)\cos(\alpha+\varphi)-c\varrho\sin\alpha(\sin\alpha.\sin 2\varphi-2\cos\alpha) = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass das Product der von einem Endpunkt B der Basis aus gerechneten Abschnitte für jede durch B gelegte Transversale constant ist gleich a^2. Natürlich gilt dieser Satz, aus dem sich eine sehr einfache Construction der von einem Endpunkt der Basis an die Schleife der Curve zu legenden Tangente ergiebt, auch für die durch A gezogenen Transversalen.

§ 6.

Ausgeschlossen von dieser Darstellung ist der einzige, gerade besonders einfache *Fall, wenn von den beiden parallelen Tangenten,* deren Berührungspunkte im letzten Paragraphen als Endpunkte der Basis des Fundamentaldreiecks genommen wurden, *die eine selbst Asymptote wird* (Fig. 4), d. h. wenn

$$M = \xi_1\xi_2+\eta^2 = 0$$

ist, in welchem besonderen Falle der Winkel an der Spitze ACB durch CM in zwei Stücke getheilt wird, deren Differenz gleich einem rechten Winkel ist. Alsdann wird *die Gleichung der Curve,* wenn man noch ξ_1 durch ξ ersetzt und ξ_2 eliminirt:

$$(\xi^2-\eta^2)y(x^2+y^2)-(\xi^2+\eta^2)\eta(x^2-y^2) = 0;$$

in dieser Gleichung können ξ und η, die Coordinaten eines Endpunktes der Basis, mit x und y, den laufenden Coordinaten der Curve vertauscht werden, wodurch die Veränderlichkeit der Basis auf der Curve (§ 4) angedeutet wird, in Betreff deren sich die gegenwärtige, specielle Curve von der allgemeinen nicht unterscheidet. Dieselbe ist ausserdem symmetrisch in Beziehung auf die y-Axe.

Die *Gleichung der Asymptote* wird

$$(\xi^2-\eta^2)y = (\xi^2+\eta^2)\eta.$$

Nennt man h die Entfernung der Asymptote vom Doppelpunkt C der Curve, wo h demnach zugleich der Durchmesser CE der Schleife ist (§ 2), so lässt sich die *Gleichung der symmetrischen Curve* noch einfacher darstellen, nämlich

$$y(x^2+y^2) = h(x^2-y^2),$$

und für Polarcoordinaten ϱ und φ:

$$\varrho.\sin\varphi = h.\cos 2\varphi.$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den dem Doppelpunkte C gegenüberliegenden Punkt E der Schleife, so wird *die Gleichung der Curve für rechtwinklige Coordinaten:*

$$(x^2+y^2)(2h-y) = h^2 y,$$

und *für Polarcoordinaten* zerfällt die Gleichung in die beiden Gleichungen:

$$\varrho_1 = h.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = h.\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

woraus sich die folgende Entstehungsweise der Curve ergiebt:

Das rechtwinklige Dreieck P_1CP_2 dreht sich um C so, dass die Hypotenuse durch denselben Punkt E geht ($EC = h$), und der Mittelpunkt M derselben die zu CE Senkrechte durchläuft, alsdann beschreiben die Endpunkte P_1 und P_2 der Hypotenuse unsere in Beziehung auf CE symmetrische Curve.

§ 7.

Ich kehre wieder zur Untersuchung der Eigenschaften der allgemeinen Ortscurve zurück. Weil jeder Punkt derselben als Endpunkt der Basis eines bestimmten Fundamentaldreiecks angenommen werden kann, so lässt sich die Untersuchung der Richtung der Curve in einem beliebigen Punkte zurückführen auf die der *Tangenten in den Endpunkten der Basis.* Nun ist sofort zu sehen, dass die Tangente an einem Endpunkte der Basis mit dieser einen Winkel bildet, der durch die zugehörige Seite des Fundamentaldreiecks halbirt wird. Denn handelt es sich z. B. um die Tangente am Punkte A der Basis des Fundamentaldreiecks und zieht man einen beliebigen benachbarten Punkt A_1 (Fig. 5) in Betracht, so ist Winkel $AA_1C = CA_1B$: geht jetzt A_1 in den Punkt A über, was in der Richtung der Tangente AT an A geschieht, so wird Winkel $TAC = CAB$. Es sind also die Tangenten an den Endpunkten der Basis leicht zu construiren. Verbindet man den

Schnittpunkt T der beiden Tangenten an A und B mit C, so wird ATB durch TC halbirt, folglich liegt T auf der Curve selbst, d. h.

Jede Basis eines Fundamentaldreiecks bildet mit den Tangenten an ihren Endpunkten ein der Curve eingeschriebenes Dreieck, für welches der Doppelpunkt der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises ist,

und umgekehrt:

Wenn man von einem beliebigen Punkte der Curve Tangenten an dieselbe legt, so haben die beiden Berührungspunkte die Eigenschaften der Endpunkte der Basis eines Fundamentaldreiecks.

Dieser Satz gestattet eine Erweiterung, durch welche die bisher entwickelten Eigenschaften der Curve sich unter einem neuen Gesichtspunkte darstellen. Nämlich wenn man durch A und B, die beiden Endpunkte einer Basis, zwei beliebige Linien zieht, welche gleichen Abstand von C haben, deren Schnittpunkt S also (§ 1) auf der Curve liegt, so sind auch die Winkel ASC und BSC (Fig. 6) einander gleich und umgekehrt:

Wenn man einen beliebigen Punkt S der Curve mit dem Doppelpunkte C derselben verbindet, so durchschneiden jede zwei durch S unter gleichen Winkeln mit SC gezogenen geraden Linien die Curve in vier Punkten, von denen zweimal zwei als Endpunkte der Basis eines Fundamentaldreiecks gewählt werden können.

Die Auswahl passender Punktepaare macht nach § 4 keine Schwierigkeit. Sind die beiden mit SC gleiche Winkel einschliessenden Geraden SAA_1 und SBB_1 (Fig. 6) und liegen die Mittelpunkte von AB und A_1B_1 auf der x-Axe, so dass ABC und A_1B_1C die Eigenschaften eines Fundamentaldreiecks besitzen, so lässt sich leicht darthun, dass die durch ACB_1 und A_1CB gelegten Kreise sich in C berühren.

Denn es sei N, ein Punkt der Geraden SC, der Mittelpunkt des Kreises, der durch C und A_1 geht, und es durchschneide dieser Kreis die Linien SA und SB in den Punkten A_{11} und B_{11}, so folgt aus der Gleichheit der Winkel ASC und BSC auch die der Centriwinkel $A_{11}NC$ und $B_{11}NC$ und endlich der Peripheriewinkel $A_{11}A_1C$ und $B_{11}A_1C$. Nun ist aber für das Fundamentaldreieck ABC Winkel $AA_1C = BA_1C$; folglich, weil AA_1C und $A_{11}A_1C$ dieselben Winkel sind, muss dasselbe auch für BA_1C und $B_{11}A_1C$ gelten und darum muss B_{11} mit B zusammenfallen. Ebenso lässt sich beweisen, dass der Mittelpunkt des dem Dreieck ACB_1 umschriebenen Kreises auf SC liegt. Demnach berühren sich die beiden durch A_1CB und ACB_1 gelegten Kreise in C.

Auch hier also zeigt sich eine vollkommene Analogie zwischen den Eigenschaften der Schnittpunkte der Curve mit jeden zwei durch einen beliebigen Punkt *S* der Curve gehenden Linien, welche mit *SC*, der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Doppelpunkte, gleiche Winkel bilden, und den Eigenschaften der Schnittpunkte der Curve mit jeden zwei durch den im Unendlichen liegenden Punkt der Curve gehenden, d. i. der Asymptote parallelen, und in gleicher Entfernung von der Axe, d. i. von der Verbindungslinie des unendlich entfernten Punktes mit dem Doppelpunkte, gezogenen Linien.

Schliesslich handle es sich noch um die Aufgabe: ***von einem Punkte T der Curve aus Tangenten an dieselbe zu legen.***

Die Basis *AB* (Fig. 5) wird durch die Curve in einem Punkte *F* durchschnitten, der wegen der Gleichheit der beiden Winkel *TAC* und *CAF* zu *T* als zweiter Endpunkt der Basis gehört und, weil *T* eine bestimmte Lage auf der Curve hat, nach § 4 leicht zu construiren ist; ausserdem sind auch die Winkel *CFA* und *CFB* einander gleich und ist demnach *F* der Fusspunkt des von der Spitze *C* auf die Basis *AB* gefällten Lothes, d. h. *CF* der Radius desjenigen dem Dreieck *ABT* eingeschriebenen Kreises, dessen Mittelpunkt *C* ist, so dass die Construction der von *T* aus an die Curve zu legenden Tangenten übereinkommt mit der der Tangenten an den mit *CF* als Radius um *C* beschriebenen Kreis.

Steglitz, Juli 1884.

Ueber die Grundlagen der Theorie der *Jacobi*schen Functionen.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Abhandlung 2.

In dem ersten Theile dieser Arbeit, den ich im Folgenden mit *J. F.* citiren werde, habe ich die Gleichungen und Ungleichheiten ermittelt, welche nothwendig und hinreichend sind, damit $4\varrho^2$ Grössen die Perioden erster und zweiter Gattung einer *Jacobi*schen Function vom Range ϱ sein können. Um die Ungleichheitsbedingungen zu erhalten, habe ich aus der gegebenen Function durch Einführung neuer Variabeln x_α und Multiplication mit einer *Jacobi*schen Function nullter Ordnung eine andere abgeleitet, deren Norm ungeändert bleibt, wenn irgend eine der Grössen x_α um 1 vermehrt wird. Dieser Umstand veranlasste mich, jene Norm nach Potenzen der Variabeln $E[x_\alpha]$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln. Dabei gelangte ich zu einer merkwürdigen Darstellung der *Jacobi*schen Functionen, welche zuerst Herr *Kronecker* in seinen berühmten Untersuchungen über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen entwickelt hat (Zur Theorie der elliptischen Functionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, April 1883, III. (C_0)). In die gewöhnliche Darstellung einer *Jacobi*schen Function vom Range ϱ durch eine ϱ-fach unendliche Reihe, deren Glieder *Jacobi*sche Functionen nullter Ordnung sind, gehen die 2ϱ Perioden in unsymmetrischer Weise ein, insofern die Vermehrung der Variabeln um ϱ der Perioden jedes Glied der Reihe ungeändert lässt (von einem gemeinsamen Exponentialfactor abgesehen), während die Vermehrung um eine der ϱ andern die verschiedenen Glieder der Reihe in einander überführt. Da für eine *Jacobi*sche Function nullter Ordnung die Zahlen $k_{\alpha\beta}$ sämmtlich verschwinden, muss man, um diese Reihenentwicklung zu erhalten, erst aus dem gegebenen Periodensystem ein solches ableiten, für das $k_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls beide Indices $\leqq \varrho$ sind. Die

hier benutzte Darstellung einer solchen Function durch eine 2ϱ-fach unendliche Reihe (§ 2—6) ist dagegen in Bezug auf alle Perioden symmetrisch, und setzt, was besonders bemerkenswerth ist, keinerlei arithmetische Umformungen voraus. Mit Hülfe derselben kann man daher den Satz, dass die Anzahl der linear unabhängigen gleichändrigen *Jacobi*schen Functionen gleich der *Quadratwurzel* aus der Determinante $|k_{\alpha\beta}|$ ist (§ 7), und die Formeln für die Anzahl der linear unabhängigen Functionen, die gerade oder ungerade sind, (§§ 8, 9) fast ohne jede Hülfe der Theorie der linearen und alternirenden bilinearen Formen mit ganzen Coefficienten ableiten. Unentbehrlich ist nur ein arithmetischer Satz, der sich auf die Vergleichung zweier periodischen Gebiete bezieht, von denen das eine einen Theil des andern bildet. Der Vollständigkeit halber habe ich für denselben einen auf *Dirichlet*s Principien (dieses Journal Bd. 19, S. 329) beruhenden und nach seinen Andeutungen (dieses Journal Bd. 40, S. 216) ausgeführten *analytischen* Beweis angegeben (§ 1).

Zum Schluss (§§ 10, 11) entwickle ich eine Formel, welche eine Verallgemeinerung der von Herrn *Prym* als *Riemann*sche *Thetaformel* bezeichneten Relation ist.

§ 1.

Die Anzahl der in Bezug auf ein System von Moduln incongruenten Systeme von Zahlen.

Ist die aus den σ^2 ganzen Zahlen $k_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots \sigma)$ gebildete Determinante σ-ten Grades von Null verschieden, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Systemen rationaler Zahlen r_α, die den Ungleichheiten

$$(1.)\qquad 0 \leqq r_\alpha < 1$$

genügen, und für welche die σ Ausdrücke

$$(2.)\qquad \sum_\alpha k_{\alpha\beta} r_\alpha = m_\beta$$

ganze Zahlen sind. Denn den Ungleichheiten (1.) zufolge liegen die Zahlen m_β zwischen bestimmten, von den Zahlen $k_{\alpha\beta}$ abhängigen, endlichen Grenzen, zwischen denen es nur eine endliche Anzahl von Systemen ganzer Zahlen m_β giebt. Jedem derselben entspricht nur ein System von Zahlen r_α, das die Gleichungen (2.) befriedigt, also höchstens ein solches System, das zugleich den Bedingungen (1.) genügt. Ist t die Anzahl jener Grössensysteme r_α, sind $n_1, \dots n_\sigma$ ganze Zahlen und ist $n_\alpha + r_\alpha = r'_\alpha$, so ist $n_\alpha \leqq r'_\alpha < n_\alpha + 1$

und die σ Ausdrücke $\sum_\alpha k_{\alpha\beta} r'_\alpha$ sind ganze Zahlen. Zugleich sind die t Systeme von Grössen r_α die einzigen, welche diesen Bedingungen genügen. Ist also g eine positive ganze Zahl, so ist die Anzahl der Systeme von Grössen r_α, die den Ungleichheiten $0 \leqq r_\alpha < g$ genügen, und für welche die Ausdrücke (2.) ganze Zahlen sind, $T = tg^\sigma$. Setzt man $r_\alpha = gx_\alpha$, $m_\beta = gy_\beta$, so ist

$$(3.) \qquad \sum_\alpha k_{\alpha\beta} x_\alpha = y_\beta,$$

und T ist die Anzahl der den Bedingungen

$$(4.) \qquad 0 \leqq x_\alpha < 1$$

genügenden Systeme von Grössen x_α, für welche die Ausdrücke gy_β ganze Zahlen sind. Daher ist, wenn g über alle Grenzen wächst,

$$t = \lim \frac{T}{g^\sigma} = \int \cdots \int dy_1 \dots dy_\sigma,$$

wo die Grenzen des σ-fachen Integrals so zu wählen sind, dass die den Grössen y_β vermöge der Gleichungen (3.) entsprechenden Grössen x_α sich von 0 bis 1 bewegen. Führt man also die Grössen x_α als Integrationsvariabeln ein, und bezeichnet man den absoluten Werth der Functionaldeterminante $\left|\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}\right| = |k_{\alpha\beta}|$ mit k, so ist

$$t = \int_0^1 \cdots \int_0^1 k\, dx_1 \dots dx_\sigma = k.$$

Die Anzahl der den Ungleichheiten (1.) genügenden, oder allgemeiner die Anzahl der mod. 1 verschiedenen Grössensysteme r_α, für welche die Ausdrücke (2.) ganze Zahlen sind, ist demnach gleich dem absoluten Werthe der Determinante $|k_{\alpha\beta}|$.

§ 2.

Die Ungleichheitsbedingungen für die Perioden.

Ich nehme an, dass die Grössen

$$a_{\alpha\beta}, \quad b_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots 2\varrho)$$

folgenden Bedingungen genügen:

A. Bewegt sich λ von 1 bis ϱ, so ist

$$(1.) \qquad \sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - b_{\lambda\alpha} a_{\lambda\beta}) = k_{\alpha\beta}$$

und

$$(2.) \qquad \sum_\lambda (a_{\varrho+\lambda,\alpha} b_{\varrho+\lambda,\beta} - b_{\varrho+\lambda,\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta}) = -k_{\alpha\beta},$$

wo die Grössen $k_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen sind (*J. F.* § 1).

B. Der Ausdruck

$$(3.)\quad i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta^{(1)}$$

ist unter den Bedingungen

$$(4.)\quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}x_\alpha = 0$$

eine negative Form (d. h. er verschwindet nur, wenn die Variabeln sämmtlich Null sind, und ist sonst beständig negativ), und unter den Bedingungen

$$(5.)\quad \sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha}x_\alpha = 0$$

eine positive Form (*J. F.* § 2).

Befriedigen die Grössen x_α sowohl die Gleichungen (4.) als auch die Gleichungen (5.), so ist daher die Form (3.) sowohl negativ als auch positiv, also gleich Null, und folglich sind die Grössen x_α sämmtlich Null. Da also den 2ϱ Gleichungen (4.) und (5.) nur durch verschwindende Werthe der 2ϱ Unbekannten x_α genügt wird, so ist die aus ihren Coefficienten gebildete Determinante 2ϱ-ten Grades

$$(6.)\quad |a_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots 2\varrho)$$

von Null verschieden. Folglich giebt es stets ein und nur ein System von Grössen $c_{\alpha\beta}$, die den Gleichungen

$$(7.)\quad b_{\alpha\beta} = \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} = \sum_\lambda (c_{\alpha\lambda}a_{\lambda\beta} + c_{\alpha,\varrho+\lambda}a_{\varrho+\lambda,\beta})$$

genügen, wo sich γ von 1 bis 2ϱ bewegt. Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt*)

$$(8.)\quad \sum_\gamma (a_{\gamma\alpha}b_{\gamma\beta} - b_{\gamma\alpha}a_{\gamma\beta}) = 0.$$

Mithin ist $\sum_{\gamma,\delta} a_{\gamma\alpha}c_{\gamma\delta}a_{\delta\beta} - \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma\delta}a_{\delta\alpha}a_{\gamma\beta} = 0$, oder wenn man in der zweiten Summe γ mit δ vertauscht, $\sum_{\gamma,\delta} a_{\gamma\alpha}a_{\delta\beta}(c_{\gamma\delta} - c_{\delta\gamma}) = 0$, und daher, weil die Determinante (6.) von Null verschieden ist,

$$(9.)\quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}.$$

Unter den 2ϱ Bedingungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha}y_\alpha = 0,\quad \sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha}z_\alpha = 0$$

ist der Ausdruck

$$i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta^{(1)} - i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta^{(1)}$$

eine positive Form, weil jeder der beiden Summanden für sich eine solche

*) Dass unter den Voraussetzungen (8.) die Determinante (6.) von Null verschieden ist folgt auch aus *J. F.* Satz V.

ist. Setzt man $y_\alpha = z_\alpha - x_\alpha$, so ergiebt sich daraus, dass die Form

$$i \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} (z_\alpha x_\beta^{(1)} - z_\alpha^{(1)} x_\beta - x_\alpha x_\beta^{(1)}),$$

welche der imaginäre Theil der Form

$$-\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} (z_\alpha x_\beta^{(1)} - \tfrac{1}{2} x_\alpha x_\beta^{(1)})$$

ist, unter den Bedingungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} z_\alpha = \sum a_{\lambda\alpha} x_\alpha, \quad \sum a_{\varrho+\lambda,\alpha} z_\alpha = 0$$

eine positive ist. Durch diese Gleichungen wird, weil die Determinante (6.) von Null verschieden ist, die Veränderlichkeit der Grössen x_α nicht beschränkt. Nun ist aber

$$k_{\alpha\beta} = \sum_\varkappa (a_{\varkappa\alpha} b_{\varkappa\beta} - b_{\varkappa\alpha} a_{\varkappa\beta}) = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\alpha} c_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\beta} + \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\alpha} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\lambda,\beta}$$
$$- \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\alpha} a_{\varkappa\beta} - \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\lambda,\alpha} a_{\varkappa\beta},$$

oder weil nach (9.) die erste Summe der dritten gleich ist,

$$(10.) \qquad k_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} (a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - a_{\varkappa\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}),$$

und mithin

$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta} z_\alpha = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} (a_{\varrho+\lambda,\beta} \sum_\alpha a_{\varkappa\alpha} z_\alpha - a_{\varkappa\beta} \sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha} z_\alpha) = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\lambda,\beta} \sum_\alpha a_{\varkappa\alpha} x_\alpha.$$

Folglich ist der imaginäre Theil des Ausdrucks

$$-\sum_{\alpha,\beta} (\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - \tfrac{1}{2} k_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta^{(1)} = \sum t_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta^{(1)}$$

eine positive Form. Da nach Gleichung (10.) $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$ ist, so ist auch, wenn man $t_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta}$ setzt, $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$. Ist $x_\alpha = \xi_\alpha + i\eta_\alpha$, so ist

$$\sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta^{(1)} = \sum s_{\alpha\beta} (\xi_\alpha + i\eta_\alpha)(\xi_\beta - i\eta_\beta) = \sum s_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta + \sum s_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta.$$

Damit also diese Form für conjugirt complexe Werthe der entsprechenden Variabeln eine positive sei, reicht es hin, dass die reelle quadratische Form $\sum s_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ der reellen Variabeln n_α eine positive ist. Demnach ist die Forderung *B.* der Bedingung äquivalent, dass der imaginäre Theil des Ausdrucks

$$-\sum_{\alpha,\beta} (\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - \tfrac{1}{2} k_{\alpha\beta}) n_\alpha n_\beta,$$

oder wenn man

$$(11.) \qquad \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} n_\alpha = a_\gamma, \quad \sum_\alpha b_{\gamma\alpha} n_\alpha = b_\gamma$$

setzt, der des Ausdrucks

$$-\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_\varkappa a_{\varrho+\lambda}$$

eine positive Form ist. Aus den Gleichungen (7.) folgt

$$(12.)\qquad b_\gamma = \sum_\alpha c_{\gamma\alpha} a_\alpha = \sum_\lambda (c_{\gamma\lambda} a_\lambda + c_{\gamma,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\lambda}).$$

Daher ist der imaginäre Theil des Ausdrucks

$$(13.)\qquad -\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_\varkappa a_{\varrho+\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda - \sum_\lambda a_\lambda b_\lambda = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\varkappa} a_{\varrho+\lambda} - \sum_\lambda a_{\varrho+\lambda} b_{\varrho+\lambda}$$

eine positive Form der reellen Variabeln n_α.

Geht also die quadratische Form $2i\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_\varkappa u_{\varrho+\lambda}$ der 2ϱ Variabeln u_α, deren Determinante gleich $|c_{\varkappa,\varrho+\lambda}|^2$ ist, durch die Substitution

$$(14.)\qquad u_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} x_\alpha$$

in $f(x_1, \dots x_{2\varrho})$ über, so ist für reelle Werthe der Variabeln x_α der reelle Theil von f eine positive Form. Die Determinante der quadratischen Form f ist $D = |c_{\varkappa,\varrho+\lambda}|^2 |a_{\alpha\beta}|^2$. Nach Formel (7.) ergiebt sich aber durch Zusammensetzung der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & \dots & c_{1\varrho} & c_{1,\varrho+1} & \dots & c_{1,2\varrho} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ c_{\varrho 1} & \dots & c_{\varrho\varrho} & c_{\varrho,\varrho+1} & \dots & c_{\varrho,2\varrho} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+1} & \dots & a_{1,2\varrho} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho,\varrho+1} & \dots & a_{\varrho,2\varrho} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots & a_{\varrho+1,\varrho} & a_{\varrho+1,\varrho+1} & \dots & a_{\varrho+1,2\varrho} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ a_{2\varrho,1} & \dots & a_{2\varrho,\varrho} & a_{2\varrho,\varrho+1} & \dots & a_{2\varrho,2\varrho} \end{vmatrix}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,2\varrho} \\ . & \dots & . \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho,2\varrho} \\ b_{11} & \dots & b_{1,2\varrho} \\ . & \dots & . \\ b_{\varrho 1} & \dots & b_{\varrho,2\varrho} \end{vmatrix} = \pm l,$$

und daher ist $D = l^2$. Zu demselben Resultate kann man auch so gelangen: Setzt man

$$u_\gamma = \sum a_{\gamma\alpha} x_\alpha, \quad u'_\gamma = \sum a_{\gamma\alpha} x'_\alpha,$$

so ist nach Gleichung (10.)

$$(15.)\qquad \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(u_\varkappa u'_{\varrho+\lambda} - u_{\varrho+\lambda} u'_\varkappa).$$

Folglich ist die Determinante der letzteren bilinearen Form, mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante multiplicirt, gleich der Determinante der ersteren Form

$$|c_{\varkappa,\varrho+\lambda}|^2 |a_{\alpha\beta}|^2 = |k_{\alpha\beta}| = l^2.$$

Für die folgende Untersuchung ist von besonderer Wichtigkeit die *Jacobi*sche Function nullter Ordnung

$$(16.)\qquad E[\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta] = F(u_1, \dots u_\varrho, u_{\varrho+1}, \dots u_{2\varrho}),$$

die ich auch kurz mit $F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ bezeichnen werde. Sind $r_1, \dots r_{2\varrho}$ beliebige Grössen, und setzt man

$$(17.)\qquad A_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha}r_\alpha, \quad B_\gamma = \sum_\alpha b_{\gamma\alpha}r_\alpha,$$

so ist nach Gleichung (12.)

$$(18.)\qquad F(u_\lambda+A_\lambda, u_{\varrho+\lambda}+A_{\varrho+\lambda}) = F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})E[\sum_\gamma B_\gamma(u_\gamma+\tfrac{1}{2}A_\gamma)].$$

Ich bezeichne das System der 2ϱ Grössen r_α mit R und setze

$$(19.)\qquad \begin{cases} F[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = F(u_\lambda+A_\lambda, u_{\varrho+\lambda})E[-\sum_\lambda B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)] \\ \qquad = F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}-A_{\varrho+\lambda})E[\sum_\lambda B_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}A_{\varrho+\lambda})]. \end{cases}$$

Ist S das System der 2ϱ Grössen s_α, und ist

$$(20.)\qquad A'_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha}s_\alpha, \quad B'_\gamma = \sum_\alpha b_{\gamma\alpha}s_\alpha,$$

so ist nach Gleichung (8.)

$$(21.)\qquad \sum_\gamma (A_\gamma B'_\gamma - B_\gamma A'_\gamma) = 0.$$

Ich bediene mich im Folgenden der Bezeichnungen (vgl. dieses Journal Bd. 89, S. 190)

$$(22.)\qquad |R, S| = \sum_\lambda (A_\lambda B'_\lambda - B_\lambda A'_\lambda) = -\sum_\lambda (A_{\varrho+\lambda}B'_{\varrho+\lambda} - B_{\varrho+\lambda}A'_{\varrho+\lambda}) = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}r_\alpha s_\beta,$$

$$(23.)\qquad [R, S] = E[\tfrac{1}{2}|R, S|], \quad (R, S) = E[|R, S|] = [R, S]^2,$$

so dass

$$(24.)\qquad 1 : [R, S] = [S, R] = [R, -S] = [-R, S]$$

ist. Dann ist (vgl. die Entwicklungen des Herrn *Weierstrass*, die Herr *Schottky*, Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln, § 1 mittheilt.)

$$(25.)\qquad \begin{cases} F[R+S](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = [S, R]F[R](u_\lambda+A'_\lambda, u_{\varrho+\lambda})E[-\sum_\lambda B'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)] \\ \qquad = [R, S]F[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}-A'_{\varrho+\lambda})E[\sum_\lambda B'_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}A'_{\varrho+\lambda})] \end{cases}$$

und

$$(26.)\qquad F[R](u_\lambda+A'_\lambda, u_{\varrho+\lambda}+A'_{\varrho+\lambda}) = (R, S)F[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})E[\sum_\gamma B'_\gamma(u_\gamma+\tfrac{1}{2}A'_\gamma)].$$

§ 3.

Conjugirt complexe *Jacobi*sche Functionen.

Sind die Grössen $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$ ($\lambda = 1, \dots \varrho$; $\alpha = 1, \dots 2\varrho$) die 2ϱ Perioden einer ***Jacobi***schen Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$, so werden die oben gemachten Voraussetzungen erfüllt, wenn man

$$(1.)\qquad a_{\varrho+\lambda,\alpha} = a_{\lambda\alpha}^{(0)},\quad b_{\varrho+\lambda,\alpha} = -b_{\lambda\alpha}^{(0)}$$

setzt *). Alsdann ist nach (7.) und (9.) § 2

$$(2.)\qquad c_{\varkappa\lambda}^{(0)} = -c_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda},\quad c_{\varkappa,\varrho+\lambda}^{(0)} = -c_{\lambda,\varrho+\varkappa}.$$

Man kann in diesem Falle die Ungleichheit (13.) § 2 auf eine andere Form bringen, die ich hier direct ableiten will. Unter den Bedingungen

$$\sum_\beta a_{\varrho+\varkappa,\beta} x_\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_\beta a_{\varkappa\beta} x_\beta^{(0)} = 0$$

ist die Form

$$i\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta^{(0)} = i\sum_{\varkappa,\alpha,\beta} a_{\varkappa\alpha} b_{\varkappa\beta} x_\alpha x_\beta^{(0)}$$

eine positive. Nach Formel (7.) § 2 ist dieselbe aber gleich

$$i\sum_{\varkappa,\alpha} a_{\varkappa\alpha}\Big(\sum_{\lambda,\beta} c_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\beta} + c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varrho+\lambda,\beta}\Big) x_\alpha x_\beta^{(0)} = i\sum_{\varkappa,\lambda,\alpha,\beta} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_{\varkappa\alpha} a_{\lambda\beta}^{(0)} x_\alpha x_\beta^{(0)}.$$

Sind $u_1, \dots u_\varrho$ complexe Variabeln, so kann man, da die Determinante (6.) § 2 von Null verschieden ist, immer 2ϱ Grössen x_α finden, die den Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = u_\lambda,\quad \sum_\alpha a_{\lambda\alpha}^{(0)} x_\alpha = 0$$

genügen. Mithin ist der Ausdruck

$$(3.)\qquad i\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_\varkappa u_\lambda^{(0)},$$

---

*) Man kann jenen Voraussetzungen auch in folgender Art genügen: Da die beiden alternirenden bilinearen Formen $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$ und $-\Sigma k_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta$ die nämlichen Invarianten haben, so sind sie äquivalent (dieses Journal. Bd. 86 S. 165), es giebt also cogrediente unimodulare Substitutionen

$$x_\gamma = \sum_\alpha g_{\gamma\alpha} y_\alpha,\quad x'_\gamma = \sum_\alpha g_{\gamma\alpha} y'_\alpha,$$

welche die erste in die zweite überführen. Dann erfüllen die Grössen

$$a_{\varrho+\lambda,\alpha} = \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha},\quad b_{\varrho+\lambda,\alpha} = \sum_\gamma b_{\lambda\gamma} g_{\gamma\alpha}$$

die obigen Bedingungen. Eine Function φ mit den Perioden $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$ hat auch die Grössen $a_{\varrho+\lambda,\alpha}$, $b_{\varrho+\lambda,\alpha}$ zu Perioden. Ist

$$\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta = \Sigma k_\lambda (x_\lambda x'_{\varrho+\lambda} - x_{\varrho+\lambda} x'_\lambda)$$

die Normalform, so geht sie durch die Substitutionen

$$x_\lambda = -y_\lambda,\quad x_{\varrho+\lambda} = y_{\varrho+\lambda}$$

und die cogredienten in $-\Sigma k_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta$ über.

in dem die conjugirten Coefficienten $ic_{\varkappa,\varrho+\lambda}$ und $ic_{\lambda,\varrho+\varkappa}$ conjugirt complexe Grössen sind, eine positive Form.

Ist daher in der Determinante $|ic_{\varkappa,\varrho+\lambda}|$ der Coefficient von $ic_{\varkappa,\varrho+\lambda}$, dividirt durch die ganze Determinante, gleich $C_{\lambda\varkappa}:l^2$, so ist auch die reciproke Form $\Sigma C_{\varkappa\lambda} z_\varkappa^{(1)} z_\lambda$ eine positive (dieses Journal Bd. 95, S. 266). Die Grössen $C_{\varkappa\lambda}$ kann man so berechnen: Setzt man

$$(4.)\qquad \sum_\alpha k_{\alpha\beta} x_\alpha = y_\beta,\quad \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} x_\alpha = u_\gamma,$$

so ist nach Formel (10.) § 2

$$y_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(u_\varkappa a_{\varrho+\lambda,\beta} - u_{\varrho+\lambda} a_{\varkappa\beta}),$$

oder wenn man

$$(5.)\qquad \sum_\varkappa c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_\varkappa = v_{\varrho+\lambda},\quad \sum_\lambda c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_{\varrho+\lambda} = -v_\varkappa$$

setzt, $y_\beta = \sum_\delta a_{\delta\beta} v_\delta$. Ergiebt sich nun durch Auflösung der Gleichungen (4.)

$$l^2 x_\alpha = \sum_\beta l_{\alpha\beta} y_\beta,$$

so ist demnach

$$l^2 u_\gamma = \sum_{\alpha,\beta,\delta} a_{\gamma\alpha} l_{\alpha\beta} a_{\delta\beta} v_\delta.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (5.)

$$l^2 u_\lambda = i \sum_\varkappa C_{\varkappa\lambda} v_{\varrho+\varkappa}$$

undmithin ist

$$(6.)\qquad C_{\varkappa\lambda} = -i \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\lambda\alpha} a_{\varkappa\beta}^{(1)} = i \sum_{\alpha,\beta} l_{\alpha\beta} a_{\varkappa\alpha}^{(1)} a_{\lambda\beta}.$$

Die Form (3.) ist also die reciproke Form der Form $\Sigma C_{\varkappa\lambda} z_\varkappa^{(1)} z_\lambda$, von der bereits *J. F.* § 6 nachgewiesen ist, dass sie eine positive ist.

Da eine *Jacobi*sche Function vom Range ϱ nicht mehr als 2ϱ unabhängige Perioden haben kann, so lassen sich alle Perioden von φ und die conjugirt complexen Grössen in der Form (17.), § 2 darstellen, wo die Grössen r_α rationale Zahlen sind. Nun folgt aber aus der Gleichung (7.) § 2

$$(7.)\qquad B_\alpha = \sum_\gamma c_{\alpha\gamma} A_\gamma = \sum_\lambda (c_{\alpha\lambda} A_\lambda + c_{\alpha,\varrho+\lambda} A_{\varrho+\lambda}).$$

Setzt man hier für A_λ, B_λ der Reihe nach irgend 2ϱ unabhängige Perioden und für $A_{\varrho+\lambda}$, $-B_{\varrho+\lambda}$ die conjugirt complexen Grössen, so können auch die so erhaltenen 2ϱ Gleichungen zur Bestimmung der Grössen $c_{\alpha\beta}$ dienen. Diese Grössen sind daher unabhängig von der Art, wie die Perioden von φ durch primitive Perioden ausgedrückt werden, und man braucht zu ihrer Berechnung nicht die primitiven Perioden von φ zu kennen, sondern nur irgend ein System von 2ϱ unabhängigen Perioden.

Sind die Grössen $s_{\varkappa\lambda} = s_{\lambda\varkappa}$ Constanten, so ist $E[-\frac{1}{2}\Sigma s_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda]\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ eine *Jacobi*sche Function mit denselben Perioden erster Gattung, wie φ, und den Perioden zweiter Gattung

$$b'_{\lambda\alpha} = b_{\lambda\alpha} - \sum_\varkappa s_{\lambda\varkappa} a_{\varkappa\alpha}.$$

Ist daher

$$s_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda} = -s^{(0)}_{\varkappa\lambda}, \quad s_{\varkappa,\varrho+\lambda} = s_{\varrho+\lambda,\varkappa} = 0, \quad b'_{\varrho+\lambda,\alpha} = -b'^{(0)}_{\lambda\alpha},$$

so ist

$$b'_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - \sum_\gamma s_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}.$$

Setzt man also

$$b'_{\alpha\beta} = \sum_\gamma c'_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta},$$

so ist

$$\Sigma c'_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \sum_\gamma (c_{\alpha\gamma} - s_{\alpha\gamma}) a_{\gamma\beta}$$

und mithin $c'_{\alpha\gamma} = c_{\alpha\gamma} - s_{\alpha\gamma}$, also

$$(8.) \qquad c'_{\varkappa,\varrho+\lambda} = c_{\varkappa,\varrho+\lambda}, \quad c'_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda} - s_{\varkappa\lambda}.$$

Ist daher $s_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda}$, so wird $c'_{\varkappa\lambda} = 0$ und nach (2.) auch $c'_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda} = 0$.

Wird die Function φ durch die Substitution

$$(9.) \qquad u_\varkappa = \Sigma h_{\varkappa\lambda} v_\lambda$$

von nicht verschwindender Determinante in eine Function der Variabeln v_λ transformirt, so sind die Perioden derselben durch die Gleichungen

$$a_{\varkappa\alpha} = \sum_\lambda h_{\varkappa\lambda} a'_{\lambda\alpha}, \quad b'_{\varkappa\alpha} = \sum_\lambda h_{\lambda\varkappa} b_{\lambda\alpha}$$

bestimmt (*J. F.* § 5). Ist daher

$$h_{\varrho+\varkappa,\varrho+\lambda} = h^{(0)}_{\varkappa\lambda}, \quad h_{\varkappa,\varrho+\lambda} = h_{\varrho+\lambda,\varkappa} = 0, \quad a'_{\varrho+\lambda,\alpha} = a'^{(0)}_{\lambda\alpha}, \quad b'_{\varrho+\lambda,\alpha} = -b'^{(0)}_{\lambda\alpha},$$

so ist

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\gamma h_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta}, \quad b'_{\alpha\beta} = \sum_\gamma h_{\gamma\alpha} b_{\gamma\beta}.$$

Wenn nun die quadratische Form $\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ durch die Substitution

$$x_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} y_\beta \quad \text{in} \quad \Sigma c'_{\gamma\delta} y_\gamma y_\delta$$

übergeht, so ist

$$c'_{\gamma\delta} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta}$$

und daher

$$\sum_\delta c'_{\gamma\delta} a'_{\delta\varepsilon} = \sum_{\alpha,\beta,\delta} c_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} h_{\beta\delta} a'_{\delta\varepsilon} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} a_{\beta\varepsilon} = \sum_\alpha h_{\alpha\gamma} b_{\alpha\varepsilon} = b'_{\gamma\varepsilon},$$

also

$$\sum_\gamma c'_{\alpha\gamma} a'_{\gamma\beta} = b'_{\alpha\beta}.$$

Speciell geht daher die Form $\Sigma c_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda$ durch die Substitution (9.) in $\Sigma c'_{\varkappa\lambda} v_\varkappa v_\lambda$ über und die Form $i\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_\varkappa u_\lambda^{(0)}$ durch jene Substitution und die conjugirt complexe in $i\Sigma c'_{\varkappa,\varrho+\lambda} v_\varkappa v_\lambda^{(0)}$. Nun kann man aber eine positive Form (3.), in der die conjugirten Coefficienten conjugirt complexe Grössen sind, durch conjugirt complexe Substitutionen in $\Sigma v_\lambda v_\lambda^{(0)}$ transformiren. Man kann also die Grössen $h_{\varkappa\lambda}$ so wählen, dass $ic'_{\lambda,\varrho+\lambda} = 1$ und sonst $c'_{\varkappa,\varrho+\lambda} = 0$ wird. Multiplicirt man φ ausserdem mit einer *Jacobi*schen Function nullter Ordnung, so kann man bewirken, dass $c_{\alpha\beta} = 0$ wird, wenn $\beta-\alpha$ nicht gleich $\pm\varrho$ ist, und dass $c_{\lambda,\varrho+\lambda} = c_{\varrho+\lambda,\lambda} = -i$ wird. Man gelangt daher zu folgendem Satz (vgl. dieses Journal Bd. 95, S. 270; ferner *J. F.* § 7):

I. ***Durch eine lineare Transformation der Variabeln und Multiplication mit einer Jacobischen Function nullter Ordnung kann man jede Jacobische Function in eine solche transformiren, in welcher zwischen den Perioden erster und zweiter Gattung die Beziehungen***

$$(10.)\quad b_{\lambda\alpha} = -ia_{\lambda\alpha}^{(0)}$$

bestehen.

In diesem Falle ist

$$(11.)\quad F(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = e^{2\pi\Sigma u_\lambda u_{\varrho+\lambda}}$$

und

$$(12.)\quad F[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = e^{2\pi\Sigma(u_\lambda u_{\varrho+\lambda} + A_\lambda u_{\varrho+\lambda} - A_\lambda^{(0)} u_\lambda - \frac{1}{2}A_\lambda A_\lambda^{(0)})}.$$

§ 4.

Entwicklung der *Jacobi*schen Functionen in Reihen.

Die *Jacobi*sche Function $\varphi(u_1, \dots u_\varrho)$ oder kurz $\varphi(u_\lambda)$ genüge den 2ϱ Gleichungen

$$(1.)\quad \varphi(u_\lambda + a_{\lambda\alpha}) = \varphi(u_\lambda) E[\sum_\lambda b_{\lambda\alpha}(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a_{\lambda\alpha}) + c_\alpha],$$

und die *Jacobi*sche Function $\psi(u_{\varrho+1}, \dots u_{2\varrho}) = \psi(u_{\varrho+\lambda})$ den 2ϱ Gleichungen

$$(2.)\quad \psi(u_{\varrho+\lambda} + a_{\varrho+\lambda,\alpha}) = \psi(u_{\varrho+\lambda}) E[\sum_\lambda b_{\varrho+\lambda,\alpha}(u_{\varrho+\lambda} + \tfrac{1}{2}a_{\varrho+\lambda,\alpha}) - c_\alpha].$$

Seien $n_1, \dots n_{2\varrho}$ ganze Zahlen und sei

$$(3.)\quad a_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} n_\alpha,\quad b_\gamma = \sum_\alpha b_{\gamma\alpha} n_\alpha,\quad c = \sum_\alpha c_\alpha n_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta.$$

Ist dann $\Phi(u_1, \dots u_\varrho,\ u_{\varrho+1}, \dots u_{2\varrho}) = \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})$ eine mit dem Producte

$\varphi(u_\lambda)\psi(u_{\varrho+\lambda})$ gleichändrige *Jacobi*sche Function*) der 2ϱ Variabeln u_γ, so ist demnach

$$(4.)\qquad \Phi(u_\lambda+a_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)+c],$$

$$(5.)\qquad \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}+a_{\varrho+\lambda}) = \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma b_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}+\tfrac{1}{2}a_{\varrho+\lambda})-c]$$

und folglich

$$(6.)\qquad \Phi(u_\lambda+a_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}+a_{\varrho+\lambda}) = \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma b_\gamma(u_\gamma+\tfrac{1}{2}a_\gamma)].$$

Macht man über die Perioden $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ die Voraussetzungen *A.* und *B.* § 2, so ist nach Formel (18.) § 2

$$\frac{\Phi(u_\lambda+a_\lambda,\, u_{\varrho+\lambda}+a_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda+a_\lambda,\, u_{\varrho+\lambda}+a_{\varrho+\lambda})} = \frac{\Phi(u_\lambda,\, u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda,\, u_{\varrho+\lambda})} = \Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[-\tfrac{1}{2}\Sigma c_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta].$$

Geht also dieser Quotient durch die Substitution

$$(7.)\qquad u_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha}x_\alpha$$

in $G(x_1,\dots x_{2\varrho}) = G(x_\alpha)$ über, so ist $G(x_\alpha+n_\alpha) = G(x_\alpha)$. Daher ist G eine eindeutige Function der 2ϱ Variabeln $E[x_\alpha]$, die für alle Werthsysteme, für welche keine dieser Grössen Null oder unendlich ist, holomorph ist. Sie lässt sich folglich in eine nach positiven und negativen Potenzen dieser Variabeln fortschreitende beständig convergirende Reihe entwickeln

$$(8.)\qquad G(x_\alpha) = \Sigma K_{m_1\dots m_{2\varrho}}E[\Sigma m_\beta x_\beta],$$

wo sich jeder der 2ϱ Summationsbuchstaben m_β von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt. Jedes der Zahlensysteme m_β lässt sich, und zwar nur in einer Weise auf die Form

$$(9.)\qquad m_\beta = \sum_\alpha k_{\alpha\beta}(r_\alpha+n_\alpha)$$

bringen, wo $r_1, \dots r_{2\varrho}$ irgend ein bestimmtes System (mod. 1) verschiedener Brüche durchlaufen, für welche die 2ϱ Ausdrücke $\sum_\alpha k_{\alpha\beta}r_\alpha$ ganze Zahlen sind,

---

*) Die dieser Function entsprechende bilineare Form ist

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}(x_\alpha x'_\beta - x_{2\varrho+\alpha}x'_{2\varrho+\beta}).$$

Seien $g_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen, die der Bedingung $g_{\alpha\beta}-g_{\beta\alpha} = k_{\alpha\beta}$ genügen, sei z. B. $g_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$, wenn $\alpha<\beta$, und $g_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha>\beta$ ist. Dann geht jene Form durch die Substitution

$$X_\alpha = x_\alpha + x_{2\varrho+\alpha},\quad X_{2\varrho+\alpha} = \sum_\beta (g_{\alpha\beta}x_\beta + g_{\beta\alpha}x_{2\varrho+\beta})$$

in die Normalform

$$\sum_\alpha (X_\alpha X'_{2\varrho+\alpha} - X_{2\varrho+\alpha}X'_\alpha)$$

über. Auf diesem Umstande beruht die Vereinfachung, welche durch die Einführung der Function Φ vom Range 2ϱ gewonnen wird.

und wo die 2ϱ Grössen n_α ganze Zahlen sind, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegen. Ist R das System der Brüche r_α und N das System der ganzen Zahlen n_α, so ist daher

$$|R, N| = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} r_\alpha n_\beta$$

eine ganze Zahl, welches auch das System N sei, oder es ist für jedes System N

$$(10.)\qquad (R, N) = 1, \quad [R, N] = [N, R].$$

Die Anzahl der (mod. 1) verschiedenen Zahlensysteme R ist nach § 1 gleich $|k_{\alpha\beta}| = l^2$. Nun ist

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta = \sum_{\lambda,\beta}(a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - b_{\lambda\alpha} a_{\lambda\beta}) x_\beta = \sum_{\lambda,\beta,\gamma} a_{\lambda\alpha} c_{\lambda\gamma} a_{\gamma\beta} x_\beta - \sum_{\lambda,\beta} b_{\lambda\alpha} a_{\lambda\beta} x_\beta$$
$$= \sum_{\lambda,\gamma} a_{\lambda\alpha} c_{\lambda\gamma} u_\gamma - \sum_\lambda b_{\lambda\alpha} u_\lambda.$$

Setzt man also

$$(11.)\qquad A_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} r_\alpha, \quad B_\gamma = \sum_\alpha b_{\gamma\alpha} r_\alpha,$$

so ist

$$\sum_\beta m_\beta x_\beta = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}(r_\alpha + n_\alpha) x_\beta = \sum_{\lambda,\alpha} c_{\lambda\alpha}(A_\lambda + a_\lambda) u_\alpha - \sum_\lambda (B_\lambda + b_\lambda) u_\lambda.$$

Ferner ist

$$E[\tfrac{1}{2}\Sigma c_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + \Sigma c_{\lambda\alpha}(A_\lambda + a_\lambda) u_\alpha + \tfrac{1}{2}\Sigma c_{\varkappa\lambda}(A_\varkappa + a_\varkappa)(A_\lambda + a_\lambda)]$$
$$= F(u_\lambda + A_\lambda + a_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) = F[R+N](u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) E[\Sigma(B_\lambda + b_\lambda)(u_\lambda + \tfrac{1}{2}A_\lambda + \tfrac{1}{2}a_\lambda)].$$

Setzt man also

$$(12.)\qquad K_{m_1 \ldots m_{2\varrho}} = L_{R+N} E[\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda}(A_\varkappa + a_\varkappa)(A_\lambda + a_\lambda) - \tfrac{1}{2}\sum_\lambda (A_\lambda + a_\lambda)(B_\lambda + b_\lambda),$$

so ist

$$\Phi(u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R \sum_N L_{R+N} F[R+N](u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}).$$

Sei N' das System der 2ϱ ganzen Zahlen n'_α und sei

$$(13.)\qquad a'_\gamma = \sum_\alpha a_{\gamma\alpha} n'_\alpha, \quad b'_\gamma = \sum_\alpha b_{\gamma\alpha} n'_\alpha, \quad c' = \sum_\alpha c_\alpha n'_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' k_{\alpha\beta} n'_\alpha n'_\beta.$$

Vermehrt man in der letzten Gleichung u_λ um a'_λ, so ergiebt sich nach Formel (25.) § 2

$$\Phi(u_\lambda + a'_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) = E[\Sigma b'_\lambda(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a'_\lambda)] \sum_R \sum_N L_{R+N}[R+N, N'] F[R+N+N'](u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda})$$

oder, wenn man N durch $N-N'$ ersetzt,

$$\Phi(u_\lambda + a'_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) = E[\Sigma b'_\lambda(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a'_\lambda) \sum_R \sum_N L_{R+N-N'}[R+N, N'] F[R+N](u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}).$$

Nach Gleichung (4.) ist aber

$$\Phi(u_\lambda + a'_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}) = E[\Sigma b'_\lambda(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a'_\lambda) + c'] \sum_R \sum_N L_{R+N} F[R+N](u_\lambda, \; u_{\varrho+\lambda}).$$

Setzt man also

$$(14.)\quad [N] = E[c] = E[\sum_{\alpha} c_\alpha n_\alpha + \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}{}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta],$$

so folgt daraus, weil eine Reihenentwicklung von der Form (8.) nur in einer Weise möglich ist, $L_{R+N-N'}[R+N, N'] = L_{R+N}[N']$, also für $N' = N$

$$(15.)\quad L_{R+N} = [R, N][-N]L_R.$$

Setzt man also

$$(16.)\quad \Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_N [-N]F[N](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$$

und allgemeiner

$$(17.)\quad \Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_N [R, N][-N]F[R+N](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}),$$

so ist

$$(18.)\quad \Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R L_R \Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}).$$

Der Logarithmus des allgemeinen Gliedes der Reihe (17.) ist eine Function zweiten Grades der sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegenden Summationsbuchstaben n_α. Der quadratische Theil dieser Function ist $i\pi(\Sigma c_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda - \Sigma a_\lambda b_\lambda)$. Da der reelle Theil dieses Ausdrucks nach (13.) § 2 eine negative Form der reellen Variabeln n_α ist, so ist die Reihe für alle endlichen Werthe der Grössen u_α convergent und stellt eine im Endlichen überall holomorphe Function dieser Variabeln dar.

Ist $f(u_1, \dots u_\varrho) = f(u_\lambda)$ irgend eine Function von $u_1, \dots u_\varrho$, so genügt die Reihe

$$(19.)\quad \sum_N f(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) = g(u_1, \dots u_\varrho),$$

falls sie convergent ist, offenbar den Bedingungen

$$g(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) = g(u_1, \dots u_\varrho).$$

Ist daher $\varphi(u_\lambda)$ eine die Gleichungen (1.) befriedigende Function, so genügt das Product $\Phi(u_\lambda) = g(u_\lambda)\varphi(u_\lambda)$ denselben Gleichungen. Setzt man $f(u_\lambda) = F(u_\lambda) : \varphi(u_\lambda)$, wo $F(u_\lambda)$ irgend eine Function von $u_1, \dots u_\varrho$ ist, so wird

$$\Phi(u_\lambda) = \Sigma \frac{F(u_\lambda + a_\lambda)}{\varphi(u_\lambda + a_\lambda)} \varphi(u_\lambda),$$

also nach (4.)

$$(20.)\quad \Phi(u_1, \dots u_\varrho) = \sum_N F(u_1+a_1, \dots u_\varrho+a_\varrho) E[-\Sigma b_\lambda(u_\lambda + \tfrac{1}{2}a_\lambda) - c].$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass eine den Gleichungen (1.) genügende Function existirt. Es ist aber leicht zu zeigen, dass die Reihe (20.) stets, wenn sie

convergent ist, die Bedingungen (1.) erfüllt. Zunächst ist nämlich

$$\Sigma' k_{\alpha\beta}(n_\alpha+n'_\alpha)(n_\beta+n'_\beta) = \Sigma' k_{\alpha\beta}(n_\alpha n_\beta+n'_\alpha n'_\beta)+\Sigma' k_{\alpha\beta}(n_\alpha n'_\beta-n_\beta n'_\alpha)+2\Sigma' k_{\alpha\beta}n_\beta n'_\alpha.$$

Die zweite dieser Summen ist aber gleich $\sum\limits_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}n_\alpha n'_\beta$, und daher ergiebt sich die Relation

$$(21.)\qquad [N+N'] = [N][N'][N,\ N'].$$

Vermehrt man daher in der Reihe (20.) u_λ um a'_λ und ersetzt N durch $N-N'$, so erhält man

$$\Phi(u_\lambda+a'_\lambda) = E[\Sigma b'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a'_\lambda)+c']\sum_N [N,\ N']E[\tfrac{1}{2}\Sigma(a_\lambda b'_\lambda-b_\lambda a'_\lambda)]f(u_\lambda+a_\lambda)$$

und folglich nach Formel (23.) § 2

$$\Phi(u_\lambda+a'_\lambda) = E[\Sigma b'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a'_\lambda)+c']\Phi(u_\lambda).$$

Nun lässt sich aber mittelst der Relationen (25.) § 2 die Reihe (17.) auf die Form

$$(22.)\qquad \Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \sum_N F[R](u_\lambda+a_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[-\Sigma b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)-c]$$

oder auf die Form

$$(23.)\qquad \Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \sum_N F[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}-a_{\varrho+\lambda})E[\Sigma b_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}a_{\varrho+\lambda})-c]$$

bringen. Die Vergleichung dieser Reihen mit der Reihe (20.) zeigt, dass $\Psi[R](u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})$ sowohl den Gleichungen (1.) als auch den Gleichungen (2.) genügt. Demnach stellt der Ausdruck (18.) für willkürliche Werthe der Constanten L_R eine mit dem Producte $\varphi(u_\lambda)\psi(u_{\varrho+\lambda})$ gleichändrige *Jacobi*sche Function dar.

§ 5.

Charakteristiken.

Ein System R von 2ϱ Zahlen r_α, für welche die 2ϱ Ausdrücke $\sum\limits_\alpha k_{\alpha\beta}r_\alpha$ ganze Zahlen sind, nenne ich eine *Charakteristik.* Das einer Charakteristik R entsprechende System von Grössen (17.) § 2, das ich gleichfalls mit R bezeichne, nenne ich eine *Periode,* sind die Grössen r_α ganze Zahlen, eine ganze Periode, sind sie gebrochene Zahlen, eine Theilperiode. Die Gesammtheit aller ganzen Perioden bildet eine *Gruppe* $\mathfrak{O}$, d. h. sind N und N' irgend zwei derselben, so ist auch $N+N'$ unter ihnen enthalten. Zwei Charakteristiken oder Perioden heissen *congruent* mod. $\mathfrak{O}$, wenn ihre Differenz in $\mathfrak{O}$ enthalten ist. *Syzygetisch* nenne ich R und S, wenn

$$(1.)\qquad (R,\ S)=1,\quad [R,\ S]=[S,\ R]$$

ist. Nach Gleichung (10.) § 4 sind die den Charakteristiken entsprechenden

Perioden mit allen Perioden von $\mathfrak{O}$ syzygetisch. Betrachtet man zwei Charakteristiken nur dann als verschieden, wenn sie mod. $\mathfrak{O}$ incongruent sind, so bilden die Charakteristiken eine Gruppe von l^2 Elementen, die ich mit $\mathfrak{R}$ bezeichne. Diejenige Charakteristik, in der die Zahlen r_α sämmtlich Null sind, bezeichne ich mit O. In der Gruppe $\mathfrak{R}$ giebt es eine Charakteristik, die in $\mathfrak{O}$ enthalten oder die $\equiv O (\text{mod.}\,\mathfrak{O})$ ist, und die folglich mit allen Charakteristiken von $\mathfrak{R}$ syzygetisch ist. Ist R eine von O verschiedene Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{R}$, so muss mindestens eine der Zahlen r_α, etwa r_1 gebrochen sein. Genügen dann die Zahlen s_β den Gleichungen

$$\sum_\beta k_{1\beta} s_\beta = 1, \quad \sum_\beta k_{\alpha\beta} s_\beta = 0 \qquad (\alpha > 1),$$

so ist

$$|R, S| = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} r_\alpha s_\beta = r_1,$$

also keine ganze Zahl. Eine Charakteristik R der Gruppe $\mathfrak{R}$, die nicht $\equiv O (\text{mod.}\,\mathfrak{O})$ ist, kann also nicht mit allen Charakteristiken von $\mathfrak{R}$ syzygetisch sein. Die kleinste Zahl n, für die nR in $\mathfrak{O}$ enthalten ist (der Generalnenner der Brüche r_α), nenne ich den ***Index***, zu welchem R (in Bezug auf $\mathfrak{O}$) gehört. Nach Gleichung (10.) § 4 ändert der Ausdruck (R, S) seinen Werth nicht, wenn R und S durch mod. $\mathfrak{O}$ congruente Charakteristiken ersetzt werden. Da nun $\mathfrak{R}$ eine Gruppe ist, so bleibt die Summe $s = \sum_R (R, S)$ ungeändert, wenn R durch $R+T$ ersetzt wird, wo T irgend eine bestimmte Charakteristik von $\mathfrak{R}$ ist, und mithin ist $s = s(T, S)$. Ist nicht $S \equiv O$, so kann man T so wählen, dass nicht $(T, S) = 1$ wird, und daher ist $s = 0$. Ist aber $S = O$, so ist $s = l^2$. So gelangt man zu den Relationen

$$(2.) \quad \begin{cases} \sum_R (R, S) = 0, & \sum_R (R, O) = l^2, \\ \sum_R (S, R) = 0, & \sum_R (O, R) = l^2. \end{cases}$$

Da ich die eben angewendete Schlussweise im Folgenden noch wiederholt gebrauchen werde, so will ich die Voraussetzungen, auf denen sie beruht, allgemein darlegen. Sei $\mathfrak{A}$ eine Gruppe, $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe derselben. Die Anzahl k der mod. $\mathfrak{B}$ verschiedenen Elemente von $\mathfrak{A}$ sei eine endliche. Ist R irgend ein Element von $\mathfrak{A}$, so sei $\chi(R)$ eine von R abhängige Grösse, die ungeändert bleibt, wenn R durch ein mod. $\mathfrak{B}$ äquivalentes Element ersetzt wird, und $s = \Sigma\chi(R)$, wo R ein vollständiges System von k (mod. $\mathfrak{B}$) verschiedenen Elementen von $\mathfrak{A}$ durchläuft. Ist S irgend ein

bestimmtes Element von $\mathfrak{A}$, so ist auch $s = \sum\limits_R \chi(R+S)$. Ist nun speciell $\chi(R+S) = \chi(R)\chi(S)$, so ist $s = s\chi(S)$ und daher $s = 0$, wenn nicht für jedes Element von $\mathfrak{A}$ die Function $\chi(S) = 1$ ist. Ist dies aber der Fall, so ist $s = k$ (vgl. *Weber*, Math. Ann. Bd. 20, S. 308.)

§ 6.

Die Functionen $\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$.

Nach Formel (25.) § 2 ist

$$F[R+N](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = [R,\ N]F[N](u_\lambda+A_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[-\Sigma B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)]$$
$$= [N,\ R]F[N](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}-A_{\varrho+\lambda})E[\Sigma B_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}A_{\varrho+\lambda})].$$

Der Relation (10.) § 4 zufolge ergiebt sich daher aus der Gleichung (17.) § 4

$$(1.)\quad \begin{cases} \Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \Psi(u_\lambda+A_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[-\Sigma B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)] \\ \qquad = \Psi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}-A_{\varrho+\lambda})E[\Sigma B_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}A_{\varrho+\lambda})]. \end{cases}$$

Ist S die Periode (20.) § 2, so folgt daraus

$$(2.)\quad \Psi[R](u_\lambda+A'_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = [R,\ S]\Psi[R+S](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)],$$

$$(3.)\quad \Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}+A'_{\varrho+\lambda}) = [R,\ S]\Psi[R-S](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma B'_{\varrho+\lambda}(u_{\varrho+\lambda}+\tfrac{1}{2}A'_{\varrho+\lambda})],$$

und durch Combination dieser beiden Gleichungen, oder auch direct aus der Formel (26.) § 2

$$(4.)\quad \Psi[R](u_\lambda+A'_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}+A'_{\varrho+\lambda}) = (R,\ S)\Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})E[\Sigma B'_\gamma(u_\gamma+\tfrac{1}{2}A'_\gamma)].$$

Ist speciell S eine ganze Periode N, so ist nach (4.) § 4 und (2.)

$$(5.)\quad \Psi[R+N](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = [R,\ N][N]\Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}).$$

Definirt man also das Verhältniss $L_{R+N} : L_R$ durch die Gleichung (15.) § 4, so ist

$$(6.)\quad L_{R+N}\Psi[R+N](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = L_R\Psi[R](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}).$$

Durch die Gleichungen (4.) in Verbindung mit den Gleichungen (4.) und (5.) § 4 ist die *Jacobi*sche Function $\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ bis auf einen constanten Factor genau bestimmt. Denn ist $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ eine diesen Gleichungen genügende Function, so lässt sie sich zunächst nach Formel (18.) § 4 auf die Form

$$\Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \sum_T L_T\Psi[T](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})$$

bringen. Daraus folgt nach Formel (4.)

$$\Phi(u_\lambda+A'_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}+A'_{\varrho+\lambda}) = E[\Sigma B'_\gamma(u_\gamma+\tfrac{1}{2}A'_\gamma)]\sum_T L_T(T,\ S)\Psi[T](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}),$$

und folglich, wenn Φ den Gleichungen (4.) genügt:

$$\Phi(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \sum_T L_T(T-R,\ S)\Psi[T](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}).$$

Setzt man für S alle l^2 Charakteristiken und addirt die erhaltenen Gleichungen, so ist nach Formel (2.) § 5 $\sum_S (T-R, S) = 0$, ausser wenn $T = R$ ist, und mithin ist die Function $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = L_R \Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$, unterscheidet sich also von $\Psi[R]$ nur um einen constanten Factor.

Zur vollständigen Bestimmung einer durch die Formel (18.) § 4 dargestellten Function Φ müssen ausser den Perioden $a_{\gamma\alpha}$, $b_{\gamma\alpha}$ und den Parametern c_α noch die Werthe der l^2 Constanten L_R gegeben sein. Dieselben lassen sich als 2ϱ-fache Integrale darstellen. Aus der Gleichung (8.) § 4 folgt nämlich

$$(7.)\qquad K_{m_1 \dots m_{2\varrho}} = \int_0^1 \dots \int_0^1 G(x_\alpha) E[-\Sigma m_\beta x_\beta]\, dx_1 \dots dx_{2\varrho}.$$

Mittelst der Formel (12.) § 4 ergiebt sich daraus

$$(8.)\qquad L_R = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}{F[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}\, dx_1 \dots dx_{2\varrho},$$

wo die Grössen u_α mittelst der Gleichungen (7.) § 4 durch die Variabeln x_α auszudrücken sind; z. B. ist

$$(9.)\qquad \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}\, dx_1 \dots dx_{2\varrho} = 1.$$

Sind $k_1, \dots k_{2\varrho}$ constante Grössen, und ersetzt man in der Gleichung (8.) § 4 x_α durch $x_\alpha + k_\alpha$, so erkennt man, dass das Integral (7.) seinen Werth nicht ändert, wenn jede der Integrationsvariabeln x_α um eine Constante vermehrt wird. Mithin bleibt auch das Integral (9.) ungeändert, wenn man zu jeder der Variabeln u_α eine beliebige Constante addirt.

Will man die Function $\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ durch die Variabeln x_α ausdrücken, so bestimme man zunächst die Constanten $p_{\alpha\beta}$ aus den Gleichungen

$$\sum_\gamma a_{\lambda\gamma} p_{\gamma\alpha} = a_{\lambda\alpha}, \quad \sum_\gamma a_{\varrho+\lambda,\gamma} p_{\gamma\alpha} = 0,$$

oder wenn man $\sum_\alpha p_{\gamma\alpha} n_\alpha = p_\gamma$ setzt,

$$(10.)\qquad \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} p_\gamma = a_\lambda, \quad \sum_\gamma a_{\varrho+\lambda,\gamma} p_\gamma = 0.$$

Dann folgt aus der Formel (10.) § 2

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta} p_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda,\beta} c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - a_{\varkappa\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}) p_\beta = -\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_\varkappa a_{\varrho+\lambda,\alpha}$$

und mithin

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha p_\beta = -\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda} a_\varkappa a_{\varrho+\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} a_\varkappa a_\lambda - \sum_\lambda a_\lambda b_\lambda .$$

Nach Formel (12.) § 4 ist daher für $R = 0$

$$K_{m \dots m_{2\varrho}} = L_N E[\tfrac{1}{2}\Sigma k_{\alpha\beta} n_\alpha p_\beta], \quad L_N = [-N] L_0 .$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (8.) § 4 ein, so erhält man

$$(11.) \qquad \frac{\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})} = \sum_N [-N] E[\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha (x_\beta + \tfrac{1}{2} p_\beta)],$$

wo

$$(12.) \qquad F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = E[\tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\gamma\alpha} b_{\gamma\beta} x_\alpha x_\beta] = E[\tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} u_\alpha x_\beta]$$

ist.

§ 7.

Die Anzahl der linear unabhängigen gleichändrigen *Jacobi*schen Functionen.

Durchläuft R die l^2 Charakteristiken, so stellt der Ausdruck (17.) § 4 l^2 Functionen dar, die von einander unabhängig sind. Denn durch $F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ dividirt, gehen sie in Potenzreihen der Variabeln $E[x_\alpha]$ über, von denen nicht zwei ein System von Exponenten gemeinsam haben. Es giebt daher l^2 und nach der Formel (18.) § 4 nicht mehr als l^2 linear unabhängige *Jacobi*sche Functionen, die den Gleichungen (4.) und (5.) § 4 genügen.

Giebt man in einer dieser Functionen $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ den Variabeln $u_{\varrho+\lambda}$ [oder u_λ] bestimmte Werthe, für welche sie nicht verschwindet, so stellt sie eine den Bedingungen (1.) [oder (2.)] § 4 genügende Function $\varphi(u_\lambda)$ [oder $\psi(u_{\varrho+\lambda})$] dar. Es giebt also Functionen φ und ψ, die jene Gleichungen befriedigen. Ist φ irgend eine der ersteren und ψ eine bestimmte der letzteren Functionen, so lässt sich das Product $\varphi\psi$ in der Form (18.) § 4 darstellen. Aus dieser Darstellung erkennt man, indem man die Grössen $u_{\varrho+\lambda}$ als constant betrachtet, dass es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger *Jacobi*scher Functionen $\varphi(u_\lambda)$ giebt, $\varphi_1, \dots \varphi_n$, aus denen sich alle andern linear zusammensetzen lassen. Die Grössen $a_{\varrho+\lambda,\alpha}$, $b_{\varrho+\lambda,\alpha}$ seien jetzt durch die Gleichungen (1.) § 3 definirt. Entwickelt man dann $\varphi(u_\lambda)$ nach Potenzen von $u_1, \dots u_\varrho$ und ersetzt jeden Coefficienten durch die conjugirt complexe Grösse, so erhält man eine Function $\varphi_0(u_\lambda)$, welche die Gleichungen

$$\varphi_0(u_\lambda + a_{\varrho+\lambda}) = E[\Sigma b_{\varrho+\lambda}(u_\lambda + \tfrac{1}{2} a_{\varrho+\lambda}) - c^{(0)}] \varphi_0(u_\lambda)$$

befriedigt. Setzt man

$$E[\Sigma h_\lambda u_{\varrho+\lambda}]\varphi_0(g_\lambda + u_{\varrho+\lambda}) = \psi(u_{\varrho+\lambda}),$$

so kann man die Constanten g_λ, h_λ so wählen, dass die Parameter dieser Function, welche dieselben Perioden erster und zweiter Gattung hat, wie φ_0, beliebig vorgeschriebene Werthe erhalten, z. B. solche, dass ψ den Gleichungen (2.) § 4 genügt (*J. F.* § 3). Gehen auf diese Weise aus den n Functionen $\varphi_\mu(u_\lambda)$ $(\mu = 1, \dots n)$ die n Functionen $\psi_\mu(u_{\varrho+\lambda})$ hervor, so sind dieselben von einander unabhängig, und jede andere mit ihnen gleichändrige Function ψ ist eine lineare Verbindung derselben.

Ist nun $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ irgend eine die Gleichungen (4.) und (5.) § 4 befriedigende Function, so ist dieselbe, falls man die Grössen $u_{\varrho+\lambda}$ als constant betrachtet, mit $\varphi(u_\lambda)$ gleichändrig und lässt sich daher auf die Form $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \Sigma L_\mu \varphi_\mu(u_\lambda)$ bringen, wo die Coefficienten L_μ von den Variabeln u_λ unabhängig sind. Aus dieser Gleichung erhält man, indem man den Variabeln u_λ n *willkürliche* Systeme von Werthen beilegt, n Gleichungen zwischen den Unbekannten L_μ, deren Determinante wegen der linearen Unabhängigkeit der Functionen $\varphi_\mu(u_\lambda)$ nicht verschwindet. Durch Auflösung derselben erkennt man, dass die Grössen L_μ mit ψ gleichändrige *Jacobi*sche Functionen der Variabeln $u_{\varrho+\lambda}$ sind. Mithin lässt sich jeder dieser Coefficienten auf die Form

$$L_\mu = \sum_\nu L_{\mu\nu}\psi_\nu(u_{\varrho+\lambda})$$

bringen, und folglich ist

$$\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_{\mu,\nu} L_{\mu\nu}\varphi_\mu(u_\lambda)\psi_\nu(u_{\varrho+\lambda}).$$

Die Anzahl der linear unabhängigen mit dem Producte $\varphi.\psi$ gleichändrigen Functionen ist daher gleich n^2. Da dieselbe aber, wie oben gezeigt, gleich l^2 ist, so ist $n = l$. Damit ist der Satz *J. F.* § 8 aufs neue bewiesen.

§ 8.

Gerade und ungerade Functionen.

Damit die *Jacobi*sche Function $\varphi(u_\lambda)$ gerade oder ungerade sei, müssen die 2ϱ Grössen

$$(1.)\qquad 2c_\alpha = h_\alpha$$

ganze Zahlen sein. Ist diese Bedingung erfüllt, und ist g die Anzahl der geraden, h die der ungeraden linear unabhängigen mit φ gleichändrigen

Functionen, so ist

$$(2.)\qquad g+h = l.$$

Sind $\varphi_\mu(u_\lambda)$ ($\mu = 1, \dots l$) irgend l unabhängige mit φ gleichändrige Functionen, so sind unter den Functionen $\varphi_\mu(u_\lambda)+\varphi_\mu(-u_\lambda)$ genau g und unter den Functionen $\varphi_\mu(u_\lambda)-\varphi_\mu(-u_\lambda)$ genau h unabhängig (*J. F.* § 10). Multiplicirt man jede dieser Functionen mit l unabhängigen, den Bedingungen (2.) § 4 genügenden Functionen $\psi_\nu(u_{\varrho+\lambda})$, so erkennt man, dass unter den l^2 Functionen $\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})+\Psi[R](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ genau gl und unter den l^2 Functionen $\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})-\Psi[R](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ genau hl linear unabhängig sind.

Unter den Bedingungen (1.) ist die Function $\Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ mit $\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ gleichändrig, und daher lassen sich die Coefficienten m_R so bestimmen, dass

$$(3.)\qquad l\Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_R\, \Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$$

wird, wo R die l^2 Elemente der Gruppe $\mathfrak{R}$ durchläuft. Um m_R für alle Charakteristiken zu definiren, setze ich fest, dass das Product $m_R\,\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ ungeändert bleiben soll, wenn R durch eine mod. $\mathfrak{O}$ congruente Charakteristik ersetzt wird, setze ich also, da $[-N]=[N]$ ist,

$$(4.)\qquad m_{R+N} = [R, N][N]m_R.$$

Ist dann S eine bestimmte Charakteristik, so durchläuft $R-S$ zugleich mit R die Gruppe $\mathfrak{R}$, und mithin ist auch

$$l\Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_{R-S}\, \Psi[R-S](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}).$$

Vermehrt man $u_{\varrho+\lambda}$ um $A'_{\varrho+\lambda}$, so erhält man nach Gleichung (3.) § 6

$$(5.)\qquad l\Psi[S](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_{R-S}[S, R]\, \Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}).$$

Auch in dieser Summe bleibt jedes Glied ungeändert, wenn R durch eine congruente Charakteristik ersetzt wird. Sei nun $e_{RS}=0$, wenn R und S (mod. $\mathfrak{O}$) verschieden sind, dagegen

$$(6.)\qquad e_{R,R+N} = [R, N][N],$$

also speciell $e_{RR}=1$. Dann ist

$$l(\Psi[S](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})+\Psi[S](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})) = \sum_R (m_{R-S}[S, R]+le_{RS})\,\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}).$$

Durchläuft S die Gruppe $\mathfrak{R}$, so sind unter diesen l^2 Functionen, wie oben gezeigt, genau lg linear unabhängig. Folglich ist der Rang (vgl. dieses Journal Bd. 86, S. 148) des Systems

$$m_{R-S}[S, R]+le_{RS},$$

wo sowohl R als auch S die Gruppe $\mathfrak{R}$ durchläuft, gleich lg. Mithin verschwindet die Determinante $|m_{R-S}[S,R]+xe_{RS}|$ für $x=l$ mindestens von der Ordnung $l^2-lg=lh$. Ebenso zeigt man aber, dass sie für $x=-l$ mindestens von der Ordnung lg verschwindet. Da sie nicht für mehr als $l^2=lg+lh$ Werthe verschwinden kann, so ist daher

$$(7.)\quad |m_{R-S}[S,\ R]+xe_{RS}| = (x+l)^{lg}(x-l)^{lh}.$$

Vergleicht man in dieser Relation die Coefficienten von x^{n-1}, so erhält man, falls man m_0 kurz mit m bezeichnet, $l^2(g-h)=\Sigma m_{R-R}=l^2m$ oder

$$(8.)\quad m = g-h.$$

Der Gleichung (8.) § 6 zufolge ist

$$(9.)\quad \frac{m}{l} = \int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{\Psi(-u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})}dx_1\dots dx_{2\varrho},$$

wo

$$\Psi(-u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \Sigma[N]F[N](-u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})$$

ist. Nun ist aber

$$F[N](-u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}):F(u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda})$$
$$= E[-2\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda}u_\varkappa u_{\varrho+\lambda}+\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda}a_\varkappa u_{\varrho+\lambda}+\Sigma c_{\varkappa\lambda}(-u_\varkappa+\tfrac{1}{2}a_\varkappa)a_\lambda-\Sigma b_\varkappa(-u_\varkappa+\tfrac{1}{2}a_\varkappa)]$$

und daher nach Gleichung (12.) § 2

$$\frac{\Psi(-u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})} = \sum_N[N]E[-2\sum_{\varkappa,\lambda}c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(u_\varkappa-\tfrac{1}{2}a_\varkappa)(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}a_{\varrho+\lambda})].$$

Geht die quadratische Form $2i\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda}u_\varkappa u_{\varrho+\lambda}$ durch die Substitution (7.) § 4 in $f(x_1,\dots x_{2\varrho})=f(x_\alpha)$ über, so ist

$$2i\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(u_\varkappa-\tfrac{1}{2}a_\varkappa)(u_{\varrho+\lambda}-\tfrac{1}{2}a_{\varrho+\lambda}) = f(x_\alpha-\tfrac{1}{2}n_\alpha),$$

und mithin (falls man N durch N' ersetzt)

$$\frac{\Psi(-u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})} = \sum_{N'}[N']e^{-\pi 2f(x_\alpha-\frac{1}{2}n'_\alpha)}.$$

In dieser Summe setze ich $n'_\alpha=n_\alpha+2m_\alpha$, wo jede der Zahlen n_α ein vollständiges Restsystem (mod. 2) durchläuft und jede der Zahlen m_α sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt. Dann ergiebt sich

$$\frac{\Psi(-u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda,u_{\varrho+\lambda})} = \sum_N[N](\sum_M e^{-2\pi f(x_\alpha-\frac{1}{2}n_\alpha-m_\alpha)}).$$

Nun ist aber (*Hermite, Liouv.* Journ. 1858, p. 34; *Weber,* dieses Journal Bd. 74, S. 67)

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_M e^{-\pi 2 f(x_\alpha - \frac{1}{2} n_\alpha - m_\alpha)} dx_1 \ldots dx_{2\varrho}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi 2 f(x_\alpha - \frac{1}{2} n_\alpha)} dx_1 \ldots dx_{2\varrho}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi 2 f(x_\alpha)} dx_1 \ldots dx_{2\varrho} = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

wo D die Determinante der quadratischen Form $2f(x_\alpha)$ ist, deren reeller Theil für reelle Werthe der Variabeln eine positive Form ist. Da nach Formel (8.) m von der Wahl der Perioden $a_{\varrho+\lambda,\alpha}$ unabhängig ist, so kann man über dieselben die Voraussetzung (1.) § 3 machen. Dann sind aber in der Form $2i\Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda} u_\varkappa u_{\varrho+\lambda}$ die Coefficienten $ic_{\varkappa,\varrho+\lambda}$ und $ic_{\lambda,\varrho+\varkappa}$ conjugirt complexe Grössen. Setzt man also für die Variabeln u_λ und $u_{\varrho+\lambda}$ die conjugirt complexen Grössen $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha$ und $\sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha} x_\alpha$, so erhält man einen reellen Ausdruck $f(x_\alpha)$. Demnach sind alle Elemente des letzten Integrals positiv und folglich ist $\sqrt{D}$ eine positive Grösse. Da nun in § 2 gezeigt ist, dass $D = 2^{2\varrho} l^2$ ist, so ergiebt sich

$$(10.) \qquad 2^\varrho m = \Sigma[N] = \sum_{n_1 \ldots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum_\alpha h_\alpha n_\alpha + \sum'_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta},$$

wo jeder der Zahlen n_α die Werthe 0 und 1 zu ertheilen sind. Die Charakteristiken von $\mathfrak{O}$ bilden, falls man die mod. $2\mathfrak{O}$ congruenten nicht als verschieden betrachtet, eine Gruppe von $2^{2\varrho}$ Elementen, die ich mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen werde. Die Charakteristiken dieser Gruppe durchläuft N in der obigen Summe.

Aus der Gleichung (9.) § 6 und aus den Gleichungen (2.) und (9.) ergeben sich die merkwürdigen Formeln

$$(11.) \quad \begin{cases} \dfrac{2g}{l} = \displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) + \Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})} dx_1 \ldots dx_{2\varrho}, \\[2ex] \dfrac{2h}{l} = \displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) - \Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})}{F(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})} dx_1 \ldots dx_{2\varrho}. \end{cases}$$

In ähnlicher Art wie oben lassen sich alle in die Formel (4.) eingehenden Zahlen m_R bestimmen. Einfacher aber erkennt man ihre Bedeutung auf folgendem Wege. Jede den Gleichungen (1.) § 4 genügende Function $\varphi(u_\lambda)$ lässt sich (und zwar für $l > 1$ auf verschiedene Arten) in der Form

$$\varphi(u_\lambda) = \sum_S L_S \Psi[S](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$$

darstellen, wo S die l^2 (mod. $\mathfrak{O}$) verschiedenen Charakteristiken durchläuft und L_S von den Variabeln u_λ unabhängig ist. Setzt man nun

$$(12.)\qquad \varphi[R](u_\lambda) = \varphi(u_\lambda+A_\lambda)E[-\Sigma B_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)],$$

so ergeben sich in analoger Weise, wie aus den Gleichungen (1.) § 6 die Gleichungen (2.) und (5.) § 6 abgeleitet worden sind, die Relationen

$$(13.)\qquad \varphi[R](u_\lambda+A'_\lambda) = [R,\ S]\varphi[R+S](u_\lambda)E[\Sigma B'_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A'_\lambda)],$$

$$(14.)\qquad \varphi[R+N](u_\lambda) = [R,\ N][N]\varphi[R](u_\lambda).$$

Vermehrt man also in der obigen Gleichung u_λ um A_λ, so erhält man

$$\varphi[R](u_\lambda) = \sum_S L_S[S,\ R]\Psi[R+S](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}).$$

Ersetzt man in der Summe (5.) R durch $R+S$, so findet man

$$l\Psi[S](-u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_R[S,\ R]\Psi[R+S](u_\lambda,\ u_{\varrho+\lambda}).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit L_S und summirt nach S, so ergiebt sich daher

$$(15.)\qquad l\varphi(-u_\lambda) = \sum_R m_R\varphi[R](u_\lambda).$$

Die Zahlen m_R können also dadurch definirt werden, dass für jede den Gleichungen (1.) § 4 genügende Function die Relation (15.) besteht. Setzt man nun

$$\varphi(u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)E[-\tfrac{1}{2}\Sigma B_\lambda u_\lambda] = \chi(u_\lambda),$$

so ist

$$\chi(u_\lambda+a_\lambda) = [N,\ R]E[\Sigma b_\lambda(u_\lambda+\tfrac{1}{2}a_\lambda)+c]\chi(u_\lambda).$$

Diese Relation unterscheidet sich von der Gleichung (4.) § 4 nur dadurch, dass an die Stelle der Parameter c_α die Grössen $c_\alpha+\frac{1}{2}\sum_\beta k_{\alpha\beta}r_\beta$ getreten sind, die ebenfalls die Hälften ganzer Zahlen sind. Ferner ist

$$\chi[S](u_\lambda) = [R,\ S]\varphi[S](u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)E[-\tfrac{1}{2}\Sigma B_\lambda u_\lambda].$$

Vermindert man nun in der aus (3.) folgenden Gleichung

$$l\varphi(-u_\lambda) = \sum_S m_{R+S}\varphi[R+S](u_\lambda)$$

die Variabeln u_λ um $\frac{1}{2}A_\lambda$, so erhält man

$$l\varphi(-u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda) = \sum_S m_{R+S}\varphi[R+S](u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda-A_\lambda)$$
$$= E[-\Sigma B_\lambda u_\lambda]\sum_S m_{R+S}\varphi[S](u_\lambda+\tfrac{1}{2}A_\lambda)$$

und mithin

$$(16.)\qquad l\chi(-u_\lambda) = \sum_S m_{R+S}\chi[S](u_\lambda).$$

Folglich hat m_R für die Functionen $\chi(u_\lambda)$ die nämliche Bedeutung, wie m für die Functionen $\varphi(u_\lambda)$ und daher ist

$$(17.)\qquad 2^\varrho m_R = \sum_N [R,\ N][N] = \sum_{n_1,\dots n_{2\varrho}} (-1)^{\sum\limits_\alpha h_\alpha n_\alpha + \sum\limits_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta} r_\alpha n_\beta + \sum\limits_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}.$$

Aus den Gleichungen (15.) und (17.) folgt

$$2^\varrho l\varphi(-u_\lambda) = \sum_{R,N} [R,\ N][N]\varphi[R](u_\lambda),$$

also nach Gleichung (14.)

$$2^\varrho l\varphi(-u_\lambda) = \sum_{R,N} \varphi[R+N](u_\lambda).$$

Man gelangt daher zu dem merkwürdigen Satze*):

II. ***Durchläuft** P **alle mod. 2 verschiedenen Systeme von Zahlen** p_α, **für welche die** 2ϱ **Ausdrücke** $\sum\limits_\alpha k_{\alpha\beta} p_\alpha$ **ganze Zahlen sind, so ist***

$$(18.)\qquad 2^\varrho l\varphi(-u_\lambda) = \sum_P \varphi[P](u_\lambda).$$

Anmerkung: Bei der Herleitung der Formel (10.) ist die Bestimmung des Vorzeichens von $\sqrt{D}$ die Hauptsache. Ich will daher zeigen, wie man dieselbe direct ausführen kann, ohne über die Grössen $a_{\varrho+\lambda,\alpha}$ eine specielle Voraussetzung zu machen. Ist $f(x_1,\dots x_\sigma)$ eine quadratische Form mit complexen Coefficienten, aber reellen Variabeln, deren reeller Theil eine positive Form ist, so ist

$$(19.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi f(x_1,\dots x_\sigma)}dx_1\dots dx_\sigma = \frac{1}{\sqrt{D}},$$

wo D die Determinante von f ist. Zufolge der über f gemachten Annahme lässt sich diese Function durch eine reelle Substitution in eine Form verwandeln, die nur die Quadrate der Variabeln enthält (*Weierstrass*, Berliner Monatsber. 1858). Mit Hülfe dieser Umformung erhält man (wie Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gezeigt hat) für das Vorzeichen von $\sqrt{D}$ folgende Bestimmung: Ist f_0 der zu f conjugirt complexe Ausdruck, so verschwindet die Determinante der Formenschaar $f-sf_0$ nur für Werthe vom

*) Die Function $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum\limits_P \Psi[P](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ genügt, wie leicht zu zeigen, den Gleichungen (4.) und (5.) § 4 und (4.) § 6 (für $R=O$), und kann sich daher nach § 6 von $\Psi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ nur um einen constanten Factor L unterscheiden. Vermehrt man in der erhaltenen Gleichung u_λ um A_λ, setzt für R alle mod. $2\mathfrak{D}$ verschiedenen Charakteristiken und addirt die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich $L^2 = 2^{2\varrho}l^2$. Auf diesem Wege kann man also die Zahlen m_R nur bis auf ein gemeinsames Vorzeichen genau bestimmen.

absoluten Betrage 1 und nicht für $s=-1$. Durchläuft s diese σ Werthe, und bezeichnet man die *Phase* φ einer complexen Grösse $s=\varrho e^{i\varphi}$ mit $Ph(s)$, so ist

$$(20.)\qquad Ph(\sqrt{D}) = \tfrac{1}{4}\Sigma Ph(s),$$

falls

$$(21.)\qquad -\pi < Ph(s) < \pi$$

ist.

Sind nun y_α die durch die 2ϱ linearen Gleichungen

$$\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} y_\alpha = -\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha, \quad \sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha} y_\alpha = \sum_\alpha a_{\varrho+\lambda,\alpha} x_\alpha$$

bestimmten linearen Functionen der unabhängigen Variabeln x_α, so ist nach Gleichung (10.) § 2

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda,\beta} c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} - a_{\varkappa\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}) x_\beta$$
$$= \Sigma c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} + a_{\varkappa\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}) y_\beta,$$

also wenn man, wie in § 2,

$$(22.)\qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\varrho+\lambda}(a_{\varkappa\alpha} a_{\varrho+\lambda,\beta} + a_{\varkappa\beta} a_{\varrho+\lambda,\alpha}) = t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$$

setzt,

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta = -2\sum_\gamma t_{\alpha\gamma} y_\gamma.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\sum_\gamma k_{\gamma\delta} y_\gamma = 2\sum_\beta t_{\beta\delta} x_\beta.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Variabeln y_γ, so erhält man

$$l^2 \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta = -4\sum_{\beta,\gamma,\delta} l_{\gamma\delta} t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} x_\beta$$

und daher*)

$$(23.)\qquad l^2 k_{\alpha\beta} = -4\sum_{\gamma,\delta} l_{\gamma\delta} t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{\gamma,\delta} l_{\gamma\delta} t_{\alpha\gamma} t_{\beta\delta} = \sum_{\gamma,\delta} l_{\gamma\delta} t^{(1)}_{\alpha\gamma} t^{(1)}_{\beta\delta}$$

und mithin

$$\sum_{\gamma,\delta} l_{\gamma\delta}(t_{\alpha\gamma} + s t^{(1)}_{\alpha\gamma}) t_{\beta\delta} = \sum_{\gamma,\delta} l_{\gamma\delta} t^{(1)}_{\alpha\gamma}(t^{(1)}_{\beta\delta} + s t_{\beta\delta}).$$

Also ist

$$|t_{\alpha\beta}|\,|t_{\alpha\beta} + s t^{(1)}_{\alpha\beta}| = |t^{(1)}_{\alpha\beta}|\,|t^{(1)}_{\alpha\beta} + s t_{\alpha\beta}|$$

---

*) Diese Gleichung zeigt, dass das System der Parameter $t_{\alpha\beta}$ ein *singuläres* ist, (vgl. dieses Journal Bd. 95, S. 272). In der That ist die Transformation, durch welche $\Phi(u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ in $\Phi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ übergeht, eine *principale*.

eine reciproke Function*) von s (mit reellen Coefficienten). Setzt man nun $f(x_1, \dots x_{2\varrho}) = -2i\Sigma l_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$, so ist jene Function, welche für $s = -1$ nicht verschwindet, bis auf einen constanten Factor gleich der Determinante der Formenschaar $f - sf_0$. Die von 1 verschiedenen Werthe, für welche diese Determinante Null ist, sind folglich paarweise reciproke Grössen. Da aber unter der Voraussetzung (21.) $Ph(s) + Ph\left(\frac{1}{s}\right) = 0$ und $Ph(1) = 0$ ist, so ist nach Gleichung (20.) auch $Ph(\sqrt{D}) = 0$, also ist $\sqrt{D}$ positiv.

§ 9.

Ueber die Zahlen m_R.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen will ich noch durch einige arithmetische Erörterungen über die Zahlen m_R vervollständigen. Nach Gleichung (3.) § 8 ist

$$l\Psi(-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_{R+S} \Psi[R+S](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}).$$

Vermindert man u_λ um A'_λ, so erhält man

$$(1.)\quad l\Psi[S](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda}) = \sum_R m_{R+S}[S, R]\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$$

und daraus durch Vergleichung mit der Formel (5.) § 8 $m_{R+S} = m_{R-S}$ oder

$$(1^*.)\quad m_{R+2U} = m_R,$$

wie auch direct aus dem Ausdruck (17.) § 8 zu sehen ist. Mit Hülfe der Gleichung (4.) § 8 ergiebt sich allgemeiner

$$(2.)\quad m_{R+2U+N} = [R, N][N] m_R.$$

In der Formel (1*.) wähle ich für U eine Charakteristik, für welche $2U = M$ in $\mathfrak{C}$ enthalten ist. Nach Gleichung (10.) § 4 ist daher

$$(3.)\quad [M, N] = 1 \quad \textit{für jedes } N \textit{ in } \mathfrak{C},$$

d. h. die Zahlen m_α genügen den 2ϱ Congruenzen

$$(4.)\quad \sum_\alpha k_{\alpha\beta} m_\alpha \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dann ist nach Formel (1*.) $m_{R+M} = m_R$ und nach Formel (4.) § 8

$$m_{R+M} = [R, M][M] m_R.$$

Ist also nicht

$$(5.)\quad [R, M] = [M] \quad \textit{für jede Lösung } M \textit{ der Gleichungen (3.)},$$

*) Ist $s_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + ts_{\alpha\beta}$, so ist $r_{\alpha\beta} - ts_{\alpha\beta}$ eine gerade Function von t.

so ist $m_R = 0$. Der Relation (3.) § 8 zufolge können die Zahlen m_R nicht alle Null sein. Ist m_S von Null verschieden, so befriedigt S die Gleichungen (5.). Ist R irgend eine denselben genügende Charakteristik, und setzt man $R-S = T$, so ist

$$(6.)\quad [T, M] = 1 \quad \textit{für jede Lösung } M \textit{ der Gleichungen } (3.).$$

Damit die Gleichung (3.) für jedes Element N der Gruppe $\mathfrak{O}$ und die Gleichungen (5.) und (6.) für jede Lösung M der Gleichungen (3.) bestehe, reicht es hin, dass diese Relationen für alle mod. $2\mathfrak{O}$ incongruenten Elemente N oder M stattfinden, d. h. für die Charakteristiken der in § 8 mit $\mathfrak{M}$ bezeichneten Gruppe. Sei t die Anzahl der mod. $2\mathfrak{O}$ incongruenten Lösungen M der Congruenzen (3.). Da sie durch $M = O$ befriedigt werden, so ist $t \geqq 1$.

Sei nun T eine bestimmte Charakteristik, die den t Gleichungen (6.) genügt, z. B. $T = O$. Dann betrachte ich die Summe

$$\sum_{M,N}[T-N, M] = \sum_M ([T, M]\sum_N [N, M]),$$

wo sowohl M wie N die $2^{2\varrho}$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Nach den Entwicklungen am Ende des § 5 ist $\sum_N [N, M] = 0$, wenn M nicht den Gleichungen (3.) genügt. Erfüllt M aber diese Bedingungen, so ist

$$\sum_N [N, M] = 2^{2\varrho}$$

und zugleich der Voraussetzung nach $[T, M] = 1$. Mithin ist

$$(7.)\quad \sum_{M,N}[T-N, M] = 2^{2\varrho}t.$$

Für ein bestimmtes N ist aber nach § 5 $\sum_M [T-N, M] = 0$, falls nicht für jedes Element M der Gruppe $\mathfrak{M}$ $[T-N, M] = 1$ ist. Da die Summe (7.) von Null verschieden ist, so giebt es folglich solche Charakteristiken N, dass für jedes M in $\mathfrak{M}$ und daher auch für jedes M in $\mathfrak{O}$ $[T-N, M] = 1$ oder $(\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}N, M) = 1$ ist. Mithin ist $\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}N = U$ ein Element der Gruppe $\mathfrak{N}$, oder es ist $T = 2U+N$, also $R = S+2U+N$. Nach Formel (2.) ist folglich m_R von Null verschieden und unterscheidet sich von m_S nur durch das Vorzeichen. Dagegen ist

$$(8.)\quad m_R = 0, \quad \textit{wenn nicht } R = S+2U+N$$

ist. Es ergiebt sich also der Satz:

III. *Die Zahl m ist stets und nur dann von Null verschieden, wenn für jede Lösung der 2ϱ Congruenzen*

$$\sum_\beta k_{\alpha\beta}x_\beta \equiv 0 \pmod{2}$$

auch

$$\sum_\alpha h_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha,\beta}' k_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \equiv 0$$

ist. Ist h_α ein bestimmtes System von Zahlen, das diese Bedingungen befriedigt, so ist das allgemeinste ihnen genügende System

$$h'_\alpha \equiv h_\alpha + \sum_\beta k_{\alpha\beta} n_\beta \quad (mod.\ 2),$$

wo $n_1, \dots n_{2\varrho}$ beliebige ganze Zahlen sind, und es ist die demselben entsprechende Zahl

$$m' = m(-1)^{\sum h_\alpha n_\alpha + \sum' k_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}.$$

Zu denselben Resultaten kann man auch auf folgendem Wege gelangen: Ersetzt man in den l^2 Gleichungen (1.) u_λ durch $-u_\lambda$ und eliminirt aus den neuen Gleichungen und den ursprünglichen die Functionen $\Psi[R](-u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$, so erhält man wegen der Unabhängigkeit der Functionen $\Psi[R](u_\lambda, u_{\varrho+\lambda})$ die Relationen

$$(9.)\quad \sum_R [R,\ S-T] m_{R+S} m_{R+T} = l^2 e_{ST},$$

also wenn $T = O$ ist und S durch $2U-T$ ersetzt wird, nach Gleichung (1.)

$$\sum_R (R,\ U)[T,\ R] m_R m_{R+T} = l^2 e_{O,2U-T}.$$

Multiplicirt man mit (U, S) und summirt nach U über alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{R}$, so findet man nach Formel (2.) § 5

$$(10.)\quad [T,\ S] m_S m_{S+T} = \sum_U (U,\ S) e_{O,2U-T}.$$

Giebt es keine Charakteristik U, die der Bedingung $2U \equiv T$ (mod. $\mathfrak{O}$) oder $T = 2U+N$ genügt, so ist für jede Charakteristik U $e_{O,2U-T} = 0$ und mithin $m_S m_{S+T} = 0$. Ist also m_S von Null verschieden, so ergiebt sich daraus die Formel (8.).

Für $T = O$ folgt aus der Gleichung (10.) $m_R^2 = \sum_U (U, R) e_{O,2U}$. Nun ist $e_{O,2U} = [M]$, wenn $2U = M$ in der Gruppe $\mathfrak{O}$ enthalten ist, dagegen $e_{O,2U} = 0$, wenn dies nicht der Fall ist, und mithin ist

$$(11.)\quad m_R^2 = \sum_R [R, M][M],$$

wo M die t (mod. $2\mathfrak{O}$) verschiedenen Lösungen der Gleichungen (3.) durchläuft. Setzt man $[R, M][M] = \chi(M)$, so ist den Gleichungen (21.) § 4 und (3.) zufolge $\chi(M+M') = \chi(M)\chi(M')$. Daher verschwindet die Summe (11.), wenn R nicht die Gleichungen (5.) erfüllt. Ist dies aber der Fall, so ist

$$(12.)\quad m_R^2 = t,$$

also von Null verschieden, womit der Satz III. aufs neue bewiesen ist*).

Ich betrachte nun die Summe $\sum_{M,N}[R, M][M][M, N]$, wo sowohl M wie N die $2^{2\varrho}$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{M}$ durchläuft. Da $\sum_N [M, N]$ nur dann von Null verschieden und zwar gleich $2^{2\varrho}$ ist, wenn M die Gleichungen (3.) befriedigt, so folgt aus der Gleichung (11.)

$$2^{2\varrho} m_R^2 = \sum_{M,N}[R, M][M][M, N],$$

oder wenn man M durch $M+N$ ersetzt:

$$2^{2\varrho} m_R^2 = \sum_{M,N}[R, M][M][R, N][N] = (\sum_N [R, N][N])^2.$$

Durch die Formeln (8.), (2.) und (11.) sind die Zahlen m_R bis auf ein gemeinsames Vorzeichen genau bestimmt.

Aus der Gleichung (15.) § 8 ergiebt sich

$$l\varphi[S](-u_\lambda) = \sum_R m_{R+S}[S, R]\varphi[R](u_\lambda).$$

Daher ist

$$l\varphi[2R+S](-u_\lambda) = \sum_T m_{2R+S+T}[2R+S, T]\varphi[T](u_\lambda),$$

also nach Gleichung (1.)

$$l\varphi[2R+S](u_\lambda) = \sum_T m_{S+T}(R, T)[S, T]\varphi[T](-u_\lambda).$$

Summirt man nach R, so erhält man folglich

$$(13.)\quad l m_S \varphi(-u_\lambda) = \sum_R \varphi[2R+S](u_\lambda).$$

§ 10.

Adjungirte Gruppen. Syzygetische Gruppen.

In der folgenden Untersuchung werden zwei Charakteristiken nur dann als verschieden betrachtet, wenn sie (mod. $\mathfrak{O}$) incongruent sind. Ist $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{R}$, so ist die Ordnung p von $\mathfrak{P}$ (die Anzahl der Charakteristiken von $\mathfrak{P}$) ein Divisor der Ordnung von $\mathfrak{R}$, $l^2 = pq$. Durchläuft P die p Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ und Q ein vollständiges System (mod. $\mathfrak{P}$) verschie-

*) t ist die Anzahl der (mod. 2) incongruenten Lösungen der 2ϱ Congruenzen $\sum_\beta k_{\alpha\beta} n_\beta \equiv 0$ (mod. 2). Sind also von diesen Congruenzen τ unabhängig, oder sind in dem System $k_{\alpha\beta}$ die Determinanten $(\tau+1)$-ten Grades alle gerade, die τ-ten Grades aber nicht alle, so ist $t = 2^{2\varrho-\tau}$. Da $h = m_R^2$ ein Quadrat ist, so ist τ eine gerade Zahl 2σ, also $m_R = \pm 2^{\varrho-\sigma}$.

dener Charakteristiken von $\mathfrak{R}$, deren Anzahl q ist, so durchläuft $P+Q$ die Charakteristiken von $\mathfrak{R}$. Unter den Charakteristiken Q ist eine und nur eine in $\mathfrak{P}$ enthalten oder $\equiv O$ (mod. $\mathfrak{P}$). Alle Charakteristiken P', die mit jeder Charakteristik von $\mathfrak{P}$ syzygetisch sind, also den Gleichungen

$$(1.) \quad (P,\ P') = 1$$

genügen, bilden eine Gruppe $\mathfrak{P}'$, welche ich der Gruppe $\mathfrak{P}$ *adjungirt* nenne. (Vgl. d. J. Bd. 96, S. 94.) Sei p' die Ordnung von $\mathfrak{P}'$, $l^2 = p'q'$ und durchlaufe Q' ein vollständiges System von q' (mod. $\mathfrak{P}'$) verschiedenen Charakteristiken von $\mathfrak{R}$.

Mittelst der am Ende des § 5 entwickelten Betrachtung ergiebt sich

$$(2.) \quad \sum_{P'}(P',\ Q) = 0, \quad \sum_{P'}(P',\ O) = p',$$

falls Q nicht $\equiv O$ (mod. $\mathfrak{P}$) ist. Da sich ferner jede Charakteristik und zwar nur in einer Art auf die Form $R = P+Q$ bringen lässt, so ist nach Gleichung (2.) § 5 $\sum_{P,Q}(P', P+Q) = 0$, falls P' von O verschieden ist. Diese Summe ist aber gleich dem Producte $(\sum_{P}(P',\ P))(\sum_{Q}(P', Q))$, und da nach (1.) der erste Factor von Null verschieden ist, so ist

$$(3.) \quad \sum_{Q}(P',\ Q) = 0, \quad \sum_{Q}(O,\ Q) = q.$$

Ist daher P'_0 eine bestimmte der Charakteristiken P', und Q_0 eine bestimmte der Charakteristiken Q, so ist

$$\sum_{Q,P'}(P'_0,\ Q)(Q,\ P')(P',\ Q_0) = \sum_{Q}((P'_0,\ Q)\sum_{P'}(P',\ Q_0-Q))$$
$$= p'(P'_0,\ Q_0) = \sum_{P'}((P',\ Q_0)\sum_{Q}(P'_0-P',\ Q)) = q(P'_0,\ Q_0),$$

also $p' = q$ und folglich, weil $l^2 = pq = p'q'$ ist,

$$(4.) \quad l^2 = pp'.$$

Aus dieser Relation in Verbindung mit der aus (1.) folgenden Gleichung $(P', P) = 1$ ergiebt sich, dass die adjungirte Gruppe von $\mathfrak{P}'$ alle Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ und keine weiteren enthält. Jede der beiden Gruppen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ist also die adjungirte der andern.

Eine Gruppe $\mathfrak{P}$, die sich selbst adjungirt ist, heisst eine ***syzygetische*** Gruppe. Die Ordnung einer solchen Gruppe ist nach (4.) gleich l. Von den Charakteristiken $P_1, \dots P_l$ der Gruppe $\mathfrak{P}$ sind je zwei syzygetisch

$$(5.) \quad (P_\alpha,\ P_\beta) = 1, \quad [P_\alpha,\ P_\beta] = [P_\beta,\ P_\alpha],$$

und jede Charakteristik, die mit allen Charakteristiken von $\mathfrak{P}$ syzygetisch

ist, ist in $\mathfrak{P}$ enthalten. Um eine solche Gruppe zu construiren, nehme man eine *beliebige* Charakteristik P_1, bestimme dann eine von P_1 verschiedene Charakteristik P_2, die der Gleichung $(P_1, P_2) = 1$ genügt, dann eine von P_1 und P_2 verschiedene P_3, die den beiden Gleichungen $(P_1, P_3) = 1$ und $(P_2, P_3) = 1$ genügt, u. s. w. Nach Gleichung (4.) muss es immer möglich sein, diesen Forderungen zu genügen, bis man l Charakteristiken gefunden hat. Durchläuft Q ein vollständiges System (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedener Charakteristiken, so ist

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_Q (P,\ Q) = 0, & \sum_Q (O,\ Q) = l, \\ \sum_P (P,\ Q) = 0, & \sum_P (P,\ O) = l. \end{cases}$$

Die Elemente $P_1, \dots P_\nu$ mögen eine Basis der Gruppe $\mathfrak{P}$ bilden und von einander unabhängig sein (dieses Journal Bd. 86, S. 220), jede Charakteristik von $\mathfrak{P}$ lasse sich also auf die Form

$$P = m_1 P_1 + \cdots + m_\nu P_\nu$$

bringen, wo sich m_λ von 0 bis $n_\lambda - 1$ bewegt, falls n_λ der Index ist, zu welchem P_λ gehört, und der Ausdruck P sei nur dann in $\mathfrak{O}$ enthalten, wenn m_λ durch n_λ für $\lambda = 1, \dots \nu$ theilbar ist. Da $n_\lambda P_\lambda$ eine Charakteristik von $\mathfrak{O}$ ist, so ist das Symbol $[n_\lambda P_\lambda]$ durch die Gleichung (14.) § 4 definirt. Unter dem Symbol $[P_\lambda]$ verstehe ich irgend eine Wurzel der Gleichung

$$(7.)\quad [P_\lambda]^{n_\lambda} = [n_\lambda P_\lambda] \qquad (\lambda = 1, \dots \nu).$$

Sei ferner $P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + \cdots$ irgend ein Element von $\mathfrak{P}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gleiche oder verschiedene der Indices von 1 bis ν bedeuten und P_λ nicht öfter als $(n_\lambda - 1)$-mal vorkommt. Dann setze ich

$$(8.)\quad [P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + \cdots] = [P_\alpha][P_\beta][P_\gamma] \dots [P_\alpha,\ P_\beta][P_\alpha,\ P_\gamma][P_\beta,\ P_\gamma] \dots.$$

Ist endlich $P+N$ eine Charakteristik, die $\equiv P$ (mod. $\mathfrak{O}$) ist, so sei

$$(9.)\quad [P+N] = [P][N][P,\ N].$$

Aus den Relationen (7.), (8.) und (9.) folgt, dass die Formel (8.) auch gültig bleibt, wenn in der Summe $P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + \cdots$ die Charakteristik P_λ öfter als n_λ-mal vorkommt. Sind also $P = P_\alpha + P_\beta + \cdots$ und $P' = P_\varkappa + P_\lambda + \cdots$ irgend zwei Charakteristiken von $\mathfrak{P}$, so ist

$$\begin{aligned} &[P+P'] \\ &= [P_\alpha][P_\beta] \dots [P_\alpha,\ P_\beta] \dots [P_\varkappa][P_\lambda] \dots [P_\varkappa,\ P_\lambda] \dots [P_\alpha,\ P_\varkappa][P_\alpha,\ P_\lambda] \dots [P_\beta,\ P_\varkappa][P_\beta,\ P_\lambda] \dots \\ &= [P][P'][P,\ P'], \end{aligned}$$

und aus (21.) § 4 und (9.) folgt, dass diese Formel auch gültig bleibt, wenn P und P' durch (mod. $\mathfrak{O}$) congruente Charakteristiken ersetzt werden. Demnach ist ganz allgemein (vgl. dieses Journal Bd. 89, S. 198)

$$(10.)\qquad [P+P'] = [P][P'][P,\,P'],$$

und folglich ist die Definition des Symbols $[P]$ von der Wahl der Basis der Gruppe $\mathfrak{P}$ unabhängig.

Ist Q eine bestimmte Charakteristik, so bleiben die Formeln (14.) § 4 und (10.) bestehen, wenn $[P]$ durch $(P, Q)[P]$ ersetzt wird. Durchläuft Q ein vollständiges System (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedener Elemente von $\mathfrak{R}$, so erhält man auf diese Art jedes der l Systeme von Ausdrücken $[P]$, welche den oben aufgestellten Bedingungen genügen.

Endlich ist noch zu bemerken, dass nach Formel (14.) § 8 und nach Formel (9.) das Product $[-P]\varphi[P](u_\lambda)$ ungeändert bleibt, wenn P durch eine (mod. $\mathfrak{O}$) congruente Charakteristik ersetzt wird.

§ 11.

Relationen zwischen den Functionen $\Psi[R](u, v)$.

Die Variabeln, die ich bisher $u_{\varrho+\lambda}$ genannt habe, bezeichne ich im Folgenden mit v_λ. Ist u das System der ϱ Variabeln u_λ und v das der ϱ Variabeln v_λ, so schreibe ich für $\Psi[R](u_\lambda, v_\lambda)$ kurz $\Psi[R](u, v)$. Ist ferner S die Periode (20.) § 2, so setze ich

$$\Psi[R](u+S,\, v) = \Psi[R](u_\lambda+A'_\lambda,\, v_\lambda)$$

und

$$\Psi[R](u,\, v+S) = \Psi[R](u_\lambda,\, v_\lambda+A'_{\varrho+\lambda}).$$

Seien ferner u' und v' die Systeme der Variabeln u'_λ und v'_λ. Durchläuft P die l Charakteristiken einer syzygetischen Gruppe $\mathfrak{P}$, und betrachtet man v und v' als Constanten, so sind $\Psi(u, v')$ und die l Functionen $\Psi[P](u, v)$ zusammen $l+1$ den Gleichungen (1.) § 4 genügende Functionen von u. Zwischen denselben besteht daher eine lineare Relation

$$L\Psi(u,\, v') = \sum_P L_P \Psi[P](u,\, v).$$

Vermehrt man u um P', so erhält man nach Formel (2.) § 6

$$L\Psi[P'](u,\, v') = \sum_P L_P[P,\, P']\Psi[P+P'](u,\, v)$$

oder nach Gleichung (10.) § 10

$$L[-P']\Psi[P'](u,\, v') = \sum_P [P]L_P[-P-P']\Psi[P+P'](u,\, v)$$

und daher

$$L\sum_P [-P']\Psi[P'](u,\ v') = \sum_{P,P'}[P]L_P[-P-P']\Psi[P+P'](u,\ v).$$

Da sich das Product $[-P]\Psi[P](u,v)$ nicht ändert, wenn P durch eine (mod. $\mathfrak{O}$) congruente Charakteristik ersetzt wird, und da die Charakteristiken P eine Gruppe bilden, so bleibt die letzte Summe ungeändert, wenn man P' durch $P'-P$ ersetzt. Dann erhält man

$$L\sum_P [-P]\Psi[P](u,\ v') = (\sum_P [P]L_P)(\sum_P [-P]\Psi[P](u,\ v)).$$

Da zwischen den l^2 Functionen $\Psi[R](u,v)$ keine lineare Relation besteht, deren Coefficienten von u und v unabhängig sind, so ist $\Sigma[-P]\Psi[P](u,v)$ für unbestimmte Werthe von u und v nicht gleich Null. Wäre nun $L=0$, so müsste auch $\Sigma[P]L_P = 0$ sein. Nun kann man aber in der obigen Rechnung für $[P]$ überall $[P](P,Q)$ setzen. Multiplicirt man noch mit (Q,P'), wo P' eine Charakteristik von $\mathfrak{P}$ ist, so wäre demnach

$$\sum_P [P](P-P',\ Q)L_P = 0.$$

Setzt man für Q alle (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedenen Charakteristiken und addirt die l so erhaltenen Gleichungen, so erhält man nach Gleichung (2.) § 5 $L_{P'} = 0$. Die $l+1$ Constanten L und L_P können aber nicht sämmtlich verschwinden. Demnach folgt aus der entwickelten Formel, dass der Quotient

$$\Sigma[-P]\Psi[P](u,\ v'):\Sigma[-P]\Psi[P](u,\ v)$$

von u unabhängig ist. (Vgl. dieses Journal Bd. 89, S. 200.) Mithin ist*)

$$(1.)\quad \begin{cases} (\Sigma[-P]\Psi[P](u,v))(\Sigma[-P]\Psi[P](u',v')) \\ = (\Sigma[-P]\Psi[P](u,v'))(\Sigma[-P]\Psi[P](u',v)). \end{cases}$$

Ersetzt man $[P]$ durch $[P](P,Q)$ und führt man die Multiplication aus, so erhält man

$$\sum_{P,P'}(Q,\ P+P')[-P][-P']\Psi[P](u,\ v)\Psi[P'](u',\ v')$$
$$= \sum_{P,P'}(Q,\ P+P')[-P][-P']\Psi[P](u,\ v')\Psi[P'](u',\ v).$$

Summirt man nach Q, so bleiben nur die Glieder übrig, in denen $P' = -P$ ist, und es ergiebt sich folglich

$$(2.)\quad \Sigma\Psi[P](u,\ v)\Psi[-P](u',\ v') = \Sigma\Psi[P](u,\ v')\Psi[-P](u',\ v).$$

Vermehrt man u und v' um Q, so folgt daraus

---

*) Nach (17.) § 4 und (9.) § 10 ist $\sum_P [-P]\Psi[P](u,v) = \sum_{P,N}[-P-N]F[P+N](u,v)$.

$$\sum_P \Psi[P+Q](u,\ v)\Psi[-P-Q](u',\ v') = \sum_P (P,\ Q)\Psi[P](u,\ v')\Psi[-P](u',\ v).$$

Multiplicirt man mit (Q, P') und summirt nach Q, so findet man

$$\sum_{P,Q}(P+Q,\ P')\Psi[P+Q](u,\ v)\Psi[-P-Q](u',\ v') = l\Psi[P'](u,\ v')\Psi[-P'](u',\ v).$$

Hier durchläuft $P+Q$ alle Elemente R der Gruppe $\mathfrak{R}$, und P' ist irgend eine Charakteristik, die ich mit S bezeichnen will. Demnach ist

$$(3.)\qquad l\Psi[S](u,\ v')\Psi[-S](u',\ v) = \sum_R (R,\ S)\Psi[R](u,\ v)\Psi[-R](u',\ v').$$

Diese Relation ist eine Verallgemeinerung der Formel, welche Herr *Prym* die *Riemann*sche *Thetaformel* genannt hat *). Man kann auch direct zu derselben gelangen, da $\Psi[S](u, v')\Psi[-S](u', v)$, wenn man u' und v' als constant betrachtet, eine mit $\varphi(u)\psi(v)$ gleichändrige *Jacobi*sche Function ist und sich daher durch die l^2 Functionen $\Psi[R](u, v)$ linear ausdrücken lässt. Ersetzt man in der letzten Summe R durch $R+S$ und vermehrt dann u' um $S+T$, so erhält man

$$(4.)\qquad l\Psi[S](u, v')\Psi[T](u', v) = \sum_R [R, S-T]\Psi[R+S](u, v)\Psi[-R+T](u', v').$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man folgende Frage erledigen: Jede mit dem Producte $\varphi(u)\psi(v)$ gleichändrige *Jacobi*sche Function $\Phi(u, v)$ kann in der Form (18.) § 4 dargestellt werden. Wenn aber $l > 1$ ist, so ist nicht jeder Ausdruck von dieser Form das Product aus einer Function von u und einer Function von v. Damit dies der Fall sei, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass

$$\Phi(u,\ v)\Phi(u',\ v') = \Phi(u,\ v')\Phi(u',\ v)$$

oder

$$\sum_{S,T} L_S L_T \Psi[S](u,\ v)\Psi[T](u',\ v') = \sum_{S,T} L_S L_T \Psi[S](u, v')\Psi[T](u', v)$$

ist, also nach Formel (4.)

$$l\sum_{S,T} L_S L_T \Psi[S](u,\ v)\Psi[T](u',\ v')$$
$$= \sum_{R,S,T} L_S L_T [R,\ S-T]\Psi[R+S](u,\ v)\Psi[-R+T](u',\ v').$$

Ersetzt man in der letzten Summe S durch $S-R$ und T durch $T+R$, so erhält man, falls man über die Grössen L_R die Voraussetzung (15.) § 4 oder (6.) § 6 macht,

$$\sum_{S,T} \Psi[S](u,\ v)\Psi[T](u',\ v')(\sum_R [R,\ S-T]L_{S-R}L_{T+R}).$$

*) Nach einer andern Richtung hin hat Herr *Prym* diese Formel in seiner Arbeit *Ableitung einer allgemeinen Thetaformel, Acta Math.* 3 verallgemeinert.

Wegen der Unabhängigkeit der Functionen $\Psi[R](u, v)$ folgt daraus

$$(5.) \quad l L_S L_T = \sum_R [R, S-T] L_{S-R} L_{T+R}.$$

Von den Folgerungen, die sich aus der Formel (3.) ziehen lassen, erwähne ich hier noch die folgende.

Seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zwei adjungirte Gruppen von Charakteristiken, p und p' ihre Ordnungen, so dass

$$(6.) \quad \sqrt{p}\sqrt{p'} = l$$

ist, und sei P ein Element von $\mathfrak{P}$, P' ein Element von $\mathfrak{P}'$. Durchläuft Q ein vollständiges System (mod. $\mathfrak{P}$) verschiedener Charakteristiken, so stellt $R = P+Q$ alle Elemente von $\mathfrak{R}$ dar, und mithin ist nach Formel (3.)

$$l\Psi[P'](u, v')\Psi[-P'](u', v) = \sum_{P,Q}(Q, P')\Psi[P+Q](u, v)\Psi[-P-Q](u', v').$$

Summirt man nach P', so erhält man nach Gleichung (2.) § 10 (vgl. *Prym*, Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel, Leipzig 1882)

$$(7.) \quad \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_P \Psi[P](u, v)\Psi[-P](u', v') = \frac{1}{\sqrt{p'}}\sum_{P'}\Psi[P'](u, v')\Psi[-P'](u', v),$$

eine Verallgemeinerung der Formel (2.).

Zürich, Februar 1884.

Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn *Weierstrass*.

(Von Herrn *M. Noether* in Erlangen.)

1. Aus dem Satze, welcher der Gegenstand meines in diesem Journal, Bd. 92, pag. 301 veröffentliehten Schreibens war, folgt: „dass, wenn man aus der durch die algebraische, irreducible Gleichung

$$f(s, z) = 0$$

definirten Functionsklasse, vom Geschlecht p, alle rationalen Functionen von s, z sucht, welche in einem gegebenen, willkürlich (d. h. eine *endliche* Anzahl von Stellen ausgenommen) gelegenen Punkte (s_0, z_0) in irgend welchen Ordnungen μ, und nur in diesem Punkte, unendlich werden, dabei die Zahlen $\mu = 1, 2, 3, \dots p$ *nicht*, wohl aber *alle* übrigen Zahlen $\mu > p$ existiren." Das Letztere geht daraus hervor, dass, wie dort gezeigt, für $\mu > p$ die Function genau $\mu - p + 1$ Parameter in linearer homogener Weise enthält, also eine mit μ immer wachsende Zahl von Parametern.

Eine Erweiterung dieser Folgerung auf einen beliebigen, auch *speciellen* Punkt (s_0, z_0) von $f(s, z) = 0$ hat, wie ich der Abhandlung des Herrn *Schottky* über conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen (dieses Journal, Bd. 83, oder dessen Dissertation, Berlin 1875) entnehme, Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegeben:

> Von den Functionen der genannten Klasse, welche in einem gegebenen, beliebig speciellen Punkte (s_0, z_0) von $f(s, z) = 0$ in irgend welchen Ordnungen μ, und nur in diesem Punkte, unendlich werden sollen, existirt eine für jede Zahl μ, nur p' verschiedene Werthe von μ ausgenommen, für welche keine Functionen existiren: diese Anzahl p' ist für *alle* Punkte (s_0, z_0) dieselbe und gleich p.

Während nun Herr *Weierstrass* mit dieser bei rationaler Transfor-

mation invarianten Zahl p' das Geschlecht definirt, will ich umgekehrt, von irgend einer der gewöhnlichen Definitionen der Geschlechtszahl p ausgehend, mit einfachen algebraischen Hülfsmitteln nachweisen, dass jene Anzahl p' immer gleich p ist. In No. 5 gebe ich dann noch eine Erweiterung dieses Satzes.

2. Hierzu ist indess diejenige Auffassung der Schaaren von Punktgruppen, bez. des „*Riemann-Roch*schen Satzes" nöthig, welche von Herrn *Brill* und mir entwickelt worden ist (Math. Ann. VII; vgl. auch dieses Journal Bd. 93, pag. 275). Es sei eine Gruppe G_Q von Q Punkten a_1, $a_2, \dots a_Q$ von $f(s, z) = 0$ gegeben; es wird dann im Allgemeinen *keine* Function der Klasse existiren, welche in allen Punkten der Gruppe G_Q, und nur in diesen, unendlich in der ersten Ordnung wird. Denn sei ψ_0 eine zu f adjungirte (d. h. in den Doppelpunkten von $f(s, z) = 0$ verschwindende), in den Punkten von G_Q verschwindende ganze Function von s, z, und seien Ψ alle ebensolche Functionen gleicher Ordnung mit ψ_0, welche nur für die weiteren Nullpunkte von ψ_0 verschwinden sollen, so hätte man in $\frac{\psi}{\psi_0}$ die gesuchte Function; dabei kann es aber eintreten, dass *alle* Functionen Ψ von selbst noch für einige der Punkte aus G_Q, etwa $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ verschwinden, und die Function $\frac{\psi}{\psi_0}$ wird dann nur in den $Q-\varrho$ Punkten $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \dots a_Q$ unendlich.

Wenn die Function Ψ noch $q+1$ willkürliche Parameter in linearer homogener Form enthält, so bilden dann diejenigen Gruppen von je $Q-\varrho$ Punkten, in welchen die Function $\frac{\psi}{\psi_0}$ alle ihre Werthe erhält, eine lineare q-fach unendliche Schaar von Gruppen; und dieselben haben keinen allen gemeinsamen Punkt: die aus der Gruppe $(a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \dots a_Q)$ entstehende Schaar. Nimmt man zu *jeder* Gruppe die Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ hinzu, so erhält man wiederum eine q-fach unendliche Schaar von Gruppen, aber von je Q Punkten, in welcher jetzt ϱ *feste* — d. h. von den Parametern der Schaar unabhängige — Punkte und je $Q-\varrho$ *bewegliche* — d. h. mit den Parametern veränderliche — Punkte vorhanden sind: die aus der Gruppe $(a_1, a_2, \dots a_Q)$ entstehende Schaar.

Haben umgekehrt die aus $(a_1, a_2, \dots a_Q)$ und die aus $(a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \dots a_Q)$ entstehenden Schaaren gleich viel Parameter, so sind für $\varrho > 0$ bei der ersten Schaar die Punkte $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ *feste*, und es existirt keine Function,

welche in $(a_1, a_2, \dots a_Q)$, und nur in diesen Punkten, unendlich in der ersten Ordnung würde.

Der *Riemann-Roch*sche Satz lautet so:

Wenn in der Gruppe $G_Q = (a_1, a_2, \dots a_Q)$ noch $r+1$ linear von einander unabhängige Functionen φ verschwinden, so ist die aus der Gruppe G_Q entstehende Schaar eine q-fach unendliche, wo

$$q = Q-p+(r+1).$$

Dieser Satz gilt auch für $r=-1$ (Math. Ann. VII)*).

3. Wir gebrauchen diesen Satz nur zur Beantwortung der allgemeinen Frage: welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass in der aus einer gegebenen Gruppe $G_Q = (a_1, a_2, \dots a_Q)$ entstehenden Gesammtschaar von Gruppen von je Q Punkten einer dieser Punkte *fest* wird — d. h. dass keine Function der Klasse existirt, welche in den Punkten von G_Q, und nur in diesen, unendlich in der ersten Ordnung wird?

Wenn der Punkt a_1 in der aus G_Q entstehenden Schaar ein fester ist, so bilden diese Schaar und die aus der Gruppe $G_{Q-1} = (a_2, a_3, \dots a_Q)$ entstehende Schaar Schaaren von gleicher Mannigfaltigkeit, etwa q, wo $q \geqq Q-p$ ist. Nach No. 2 verschwinden dann in G_{Q-1} noch $\infty^{r'}$ Functionen φ, wo

$$r' = q+p-1-(Q-1) \quad \text{und} \quad r' \geqq 0;$$

in G_Q aber noch ∞^r Functionen φ, wo

$$r = q+p-1-Q = r'-1.$$

Dies sagt aus, dass die in G_{Q-1} verschwindenden Functionen φ nicht alle auch den Punkt a_1 zum Nullpunkt haben. Ist umgekehrt das Letztere der

---

*) Der Fall $\varrho = 0$ ist der eigentliche von *Riemann* und *Roch* behandelte Fall. Die Schaaren von Punktgruppen, welche aus nur *theilweise* beweglichen, theilweise aber *festen* Punkten bestehen können, sind zuerst und explicit in der Arbeit von *Brill* und mir, Math. Ann. VII (1873) eingeführt und dort principiell in den Sätzen und Beweisen verwerthet worden. Erst hierdurch ist bei beiden die Einfachheit erzielt worden; insbesondere die Ausdehnung des von *Riemann* und *Roch* gegebenen Satzes, die zwischen Q und q dabei bestehende Beziehung und die Aufstellung der Restschaar.

Genau dieselbe Auffassung für die Schaaren von Punktgruppen — unter der Bezeichnung „eigentliche und uneigentliche Klassen von Polygonen“ — und für den *Riemann-Roch*schen Satz — unter der von uns gegebenen Bezeichnung — ist neuerdings auch in die, sonst auf ganz anderem Gedankengange beruhende, *Dedekind-Weber*sche Abhandlung, dieses Journal Bd. 92, 1880, aufgenommen. Analoges wäre schon für die Abhandlung des Herrn *Christoffel*, Annali di Mat. Ser. II, t. 9, p. 240, aus dem Jahre 1878, zu bemerken.

Fall, d. h. verschwinden in G_{Q-1} noch $\infty^{r'}$, in G_Q nur $\infty^{r'-1}$ Functionen φ (oder keine für $r'=0$), so gehören G_{Q-1}, bez. G_Q zu Schaaren von den bez. Mannigfaltigkeiten

$$q' = (Q-1)-p+(r'+1),$$
$$q = Q-p+r',$$

also zu Schaaren mit gleich viel Parametern, und a_1 wird nach No. 2 *fest*. Man kann also sagen*):

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass in der aus einer gegebenen Gruppe $(a_1, a_2, \dots a_Q)$ entstehenden Gesammtschaar von Gruppen von je Q Punkten der Punkt a_1 *fest* wird, ist die, dass eine Function φ existirt, welche in den Punkten $a_2, a_3, \dots a_Q$ verschwindet, ohne in a_1 zu verschwinden.

4. Betrachtet man die Functionen, welche nur im Punkte (s_0, z_0), aber in einer Ordnung μ, unendlich werden, so wird, wenn μ den *möglichst niedrigen* Werth μ_0 hat, die Mannigfaltigkeit der zugehörigen Functionenschaar zu 1 (vgl. die Note, dieses Journal Bd. 92, pag. 302). Daher verschwinden dann nach No. 2 im Punkte (s_0, z_0) noch $\infty^{p-\mu_0}$ Functionen φ in einer Ordnung $\geqq \mu_0$ (bez. keine Function φ, wenn $\mu_0 = p+1$ ist).

Um den umfassendsten Fall zu behandeln, mögen diese $\infty^{p-\mu_0}$ Functionen φ in (s_0, z_0) alle in der Ordnung μ_1 verschwinden, wo $\mu_1 \geqq \mu_0$; ferner diejenigen darunter enthaltenen $\infty^{p-\mu_0-1}$ Functionen φ, welche in (s_0, z_0) in einer Ordnung $\geqq \mu_1+1$ verschwinden, in der Ordnung μ_2 verschwinden, wo $\mu_2 > \mu_1$; die unter diesen enthaltenen $\infty^{p-\mu_0-2}$ Functionen φ, welche in (s_0, z_0) in einer Ordnung $\geqq \mu_2+1$ verschwinden, in der Ordnung μ_3 verschwinden, wo $\mu_3 > \mu_2$ etc.; endlich möge diejenige eine Function φ, welche in (s_0, z_0) in einer Ordnung $\geqq \mu_{p-\mu_0}+1$ verschwindet, in der Ordnung $\mu_{p-\mu_0+1}$ verschwinden, wo $\mu_{p-\mu_0+1} > \mu_{p-\mu_0}$.

Nach No. 3 hat dann die Schaar von Gruppen von je μ_i+1 Punkten, welche eine Gruppe enthält, die aus μ_i+1 in (s_0, z_0) successiven Punkten besteht $(i = 1, 2, \dots p-\mu_0+1)$, den Punkt (s_0, z_0) zum *festen* Punkt — d. h. es existirt keine Function der Klasse, die nur in (s_0, z_0) in einer Ordnung μ_i+1 unendlich würde; während für alle übrigen Ordnungen μ $(\geqq \mu_0)$ je eine Function auftritt. Daher folgt:

dass von solchen Functionen der Klasse, welche im Punkte (s_0, z_0)

---

*) Für $r'=0$ vgl. die o. c. Abhandlung von *Dedekind* und *Weber*, pag. 280.

in einer Ordnung μ, und nur in diesem Punkte, unendlich werden sollen, für die Werthe

$$1,\ 2,\ \ldots\ \mu_0-1,\ \mu_1+1,\ \mu_2+1,\ \ldots\ \mu_{p-\mu_0+1}+1$$

von μ, also für p verschiedene Werthe μ, keine existiren, für alle übrigen Werthe von μ je eine.

Dies ist aber der zu beweisende Satz der No. 1, den wir auch so aussprechen können:

Unter den Schaaren von Gruppen von je μ *beweglichen* Punkten, welche je eine Gruppe enthalten, die aus μ an der Stelle (s_0, z_0) successiven Punkten besteht, existiren keine für die p verschiedenen Werthe

$$1,\ 2,\ \ldots\ \mu_0-1,\ \mu_1+1,\ u_2+1,\ \ldots\ \mu_{p-\mu_0+1}+1$$

von μ, für alle übrigen Werthe von μ je eine.

5. Man kann diesen Satz dadurch verallgemeinern, dass man eine beliebig gegebene Gruppe G_Q von Q Punkten, wo nur für G_Q keine Function φ verschwinden soll, in's Auge fasst.

Es seien nämlich die Q Punkte dieser Gruppe G_Q folgendermassen in die Ordnung

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_Q$$

gebracht:

$$G_{\mu_0} = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{\mu_0})$$

seien solche μ Punkte von G_Q, welche zu einer einfach-unendlichen Schaar gehören, während keine μ_0-1 Punkte dieser Gruppe schon zu einer solchen ∞^1-Schaar führen; $a_{\mu_0+1}, a_{\mu_0+2}, \ldots a_{\mu_1}$ seien diejenigen Punkte aus G_Q, für welche alle Functionen φ, die G_{μ_0} zu Nullpunkten haben, zugleich noch verschwinden; a_{μ_1+1} sei ein beliebiger weiterer Punkt aus G_Q; $a_{\mu_1+2}, a_{\mu_1+3}, \ldots a_{\mu_2}$ seien diejenigen Punkte aus G_Q, für welche alle Functionen φ, die

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{\mu_1+1}$$

zu Nullpunkten haben, zugleich noch verschwinden; a_{μ_2+1} sei ein weiterer beliebiger Punkt aus G_Q etc.; endlich sei $a_{\mu_{p-\mu_0}+1}$ ein weiterer beliebiger Punkt aus G_Q und $a_{\mu_{p-\mu_0}+2}, a_{\mu_{p-\mu_0}+3}, \ldots a_{\mu_{p-\mu_0+1}}$ seien diejenigen Punkte aus G_Q, für welche die Function φ, die

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{\mu_{p-\mu_0}+1}$$

zu Nullpunkten hat, zugleich noch verschwindet. Die noch übrigen Punkte aus G_Q (an Zahl $\geqq 1$) seien beliebig geordnet.

Dann folgt genau wie in 4.:

dass von den Schaaren von Gruppen von je μ *beweglichen* Punkten, welche bezüglich aus den Gruppen $G_\mu = (a_1, a_2, \dots a_\mu)$ entstehen ($\mu = 1, 2, \dots Q$), für die Werthe

$$1, \ 2, \ \dots \ \mu_0 - 1, \ \mu_1 + 1, \ \mu_2 + 1, \ \dots \ \mu_{p-\mu_0+1} + 1$$

von μ keine Schaaren existiren, für alle übrigen Werthe $\mu \leqq Q$ je eine.

Wie man also auch die Punkte der gegebenen Gruppe G_Q den Forderungen dieser Nummer gemäss geordnet hat (und es existirt im Allgemeinen eine endliche Zahl verschiedener Anordnungen), und wie speciell die Gruppe G_Q, in der nur keine Function φ verschwinden soll, auch gewählt war, *immer existiren die Schaaren für p verschiedene Zahlen μ nicht, für alle übrigen $\mu \leqq Q$ je eine Schaar.* —

Ich erwähne noch zwei weitere Verallgemeinerungen.

Erstens ordne man die Gruppe G_Q, für welche keine Function φ verschwinden soll, *ganz beliebig* in $a_1, a_2, \dots a_Q$, und betrachte der Reihe nach die Q Gruppen

$$(a_1, a_2, \dots a_\mu) \quad \text{für} \quad \mu = 1, \ 2, \ \dots \ Q.$$

Von solchen darunter enthaltenen Gruppen $(a_1, a_2, \dots a_\mu)$, welche bezüglich auf eine Schaar von je μ Punkten führen, für die wenigstens der *letzte* Punkt a_μ ein beweglicher ist, existiren genau $Q - p$.

Zweitens mögen in G_Q $r+1$ linear-unabhängige Functionen φ verschwinden. Macht man auch in diesem Falle eine der vorher bezeichneten Anordnungen der Punkte von G_Q, so folgt jetzt:

dass für $p-r-1$ Werthe von μ keine Schaaren existiren; für die übrigen $Q-p+r+1$ Werthe von μ je eine —

die letzteren den $\infty^{Q-p+r+1}$ Functionen der Klasse entsprechend, welche nur in G_Q oder einem Theil von G_Q zu ∞^1 werden.

Erlangen, November 1882.

Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$.

(Von Herrn *Ludwig Scheeffer* in München.)

Herr *Prym* hat im 82. Bande dieses Journals p. 165—172 gezeigt, dass jede der drei Functionen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx,$$

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x}x^{z-1}dx,$$

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}dx$$

durch zwei Bedingungen vollständig bestimmt ist, nämlich durch die folgenden

$$\text{(I.)}\quad \lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1, \qquad \text{(II.)}\quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z);$$

$$\text{(I}_1.\text{)}\quad \lim_{n=\infty}\frac{P(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 0, \qquad \text{(II}_1.\text{)}\quad P(z+1) = zP(z)-\frac{1}{e};$$

$$\text{(I}_2.\text{)}\quad \lim_{n=\infty}\frac{Q(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1, \qquad \text{(II}_2.\text{)}\quad Q(z+1) = zQ(z)+\frac{1}{e}.$$

Diese Bedingungen führen, wie Herr *Prym* zeigt, unmittelbar zu analytischen Darstellungen der drei Functionen. Sie haben indes den Mangel, dass sie aus der Form der Integrale, durch welche die Functionen definirt werden, zum Theil nicht ohne Weiteres ersichtlich sind. Dies gilt speciell von den Gleichungen (I.) und (I_2.). Die Bedingungen des Herrn *Prym* dürften daher nicht geeignet sein, die Identität der Integrale $\Gamma(z)$ und $Q(z)$ mit gewissen analytischen Ausdrücken nachzuweisen, insbesondere die bekannte Formel

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx = \Pi(z-1),$$

in welcher $\Pi(z-1)$ das *Euler-Gauss*sche Product bedeutet, abzuleiten.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, dass die Bedingungen (I.), (I_1.), (I_2.) sich durch andere ersetzen lassen, welche einerseits, wie die Bedingungen des Herrn ***Prym***, auf analytische Darstellungen der drei Functionen führen, andererseits den Vorzug besitzen, dass sie an den Integralen direct erkannt werden können.

Diese neuen Bedingungen sind gleichsam durch directe Wege sowohl mit den bestimmten Integralen, als mit den anderen analytischen Ausdrücken der Functionen verbunden, während man von den Bedingungen (I.) und (I_2.) des Herrn ***Prym*** zu den entsprechenden Integralen und zurück, wie es scheint, nur auf dem Umwege über das ***Euler–Gauss***sche Product gelangen kann.

Wir beweisen zunächst in § 1 einen Hülfssatz; stellen in § 2 ein System von Bedingungen zur Charakterisirung einer Function auf, welches zwei willkürliche Constanten enthält, und welchem für vorgeschriebene Werthe dieser Constanten immer nur eine einzige Function genügen kann; zeigen dann in § 3, dass die durch bestimmte Integrale definirten Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$ jene Bedingungen für gewisse Werthe der Constanten erfüllen; und leiten endlich in § 4 die bekanntesten analytischen Ausdrücke der drei Functionen aus den entsprechenden Systemen von Bedingungen ab.

§ 1.

Satz. *Eine eindeutige Function $f(z)$ der complexen Veränderlichen z möge folgenden Bedingungen genügen:*

I. *$f(z)$ ist für alle Werthe von $z = \zeta+\zeta' i$, für welche $a \leqq \zeta \leqq a+1$ ist, holomorph und dem absoluten Betrage nach kleiner als g. a und g sind reelle positive Constanten.*

II. *Die Gleichung $f(z+1) = zf(z)$ besteht für alle Werthe von z. Dann ist*

$$f(z)f(1-z) = f(1)^2\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Beweis. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, dass a eine ganze Zahl sei. Von dem für diesen Fall gültigen Beweise gelangt man zu dem Beweise des allgemeinen Falles durch unwesentliche, leicht erkennbare Modificationen.

Die Function $\varphi(z) = f(z)f(1-z)$ genügt offenbar wegen II. der Gleichung

$$(1.)\qquad \varphi(z+1) = -\varphi(z).$$

Schreiben wir mit Anwendung von (II.)

$$(2.)\qquad \varphi(z) = \frac{f(z)f(2a+1-z)}{(1-z)(2-z)\dots(2a-z)},$$

und nehmen $z=\zeta+\zeta' i$ so an, dass $a \leqq \zeta \leqq a+1$ wird, so erkennen wir, dass wegen (I.)

$$|\varphi(z)| < \left|\frac{g^2}{(1-z)(2-z)\dots(2a-z)}\right|$$

ist. Hieraus folgt erstens, dass $\varphi(z)$ in dem zur imaginären Axe parallelen Streifen $a \leqq \zeta \leqq a+1$ nur für $z=a$ und $z=a+1$ und demnach im Hinblick auf (1.) überhaupt nur für reelle ganzzahlige Werthe von z unendlich gross werden kann; zweitens, dass, wenn $\zeta' i$ der imaginäre Theil von z ist, stets

$$(3.)\qquad |\varphi(z)| \leqq \frac{g^2}{\zeta'^{2a}}$$

wird. $\varphi(z)$ sinkt also mit unendlich wachsendem ζ' dem absoluten Betrage nach unter jede angebbare Grösse δ hinab.

Ferner ist

$$z\varphi(z) = f(1+z)f(1-z) = \frac{f(a+z)}{(1+z)(2+z)\dots(a-1+z)}\;\frac{f(a-z)}{(1-z)(2-z)\dots(a-1-z)}.$$

Zufolge I. können $f(a+z)$ und $f(a-z)$ nach positiven Potenzen von z entwickelt werden. Also auch $z\varphi(z)$, und wir erhalten

$$z\varphi(z) = f(1)^2 + z\mathfrak{P}(z).$$

Die Differenz $\varphi(z) - f(1)^2\frac{\pi}{\sin\pi z}$ lässt sich also in der Umgebung des Punktes $z=0$ nach positiven Potenzen von z entwickeln.

Diese Differenz, die wir kurz mit $D(z)$ bezeichnen, hat nun folgende Eigenschaften:

A. $D(z)$ nimmt den entgegengesetzten Werth an, wenn z um 1 vermehrt wird.

B. $D(z)$ lässt sich in der Umgebung jedes endlichen Werthes z_0 nach positiven Potenzen von $z-z_0$ entwickeln. Dies ist wegen *A* als erwiesen anzusehen, wenn es für $a \leqq \zeta \leqq a+1$ nachgewiesen ist. Wird nun z_0 von a und $a+1$ verschieden angenommen, so ist jedes Glied der Differenz $D(z)$ entwickelbar, nämlich $\varphi(z)$ nach (2.) und I., $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ nach einem bekannten Satze. Für $z_0=a$ oder $z_0=a+1$ folgt aber die Entwickelung wegen *A.* unmittelbar aus der vorher für $z_0=0$ aufgestellten.

C. Der absolute Betrag von $D(z)$ ist für keinen Werth von z grösser als eine gewisse Constante G. Definiren wir nämlich einen Streifen der z-Ebene durch die Bedingung $c \leqq \zeta \leqq c+1$ und zerlegen diesen Streifen in drei Theile durch zwei Parallele zur reellen Axe resp. in den Abständen c' und $-c'$ von derselben, so wird in dem von diesen Parallelen eingeschlossenen Stück des Streifens $D(z)$ wegen *B.* überall kleiner als eine angebbare Grösse G_1 sein; in den beiden unendlich langen Stücken wird $|\varphi(z)|$ nach (3.) kleiner als $\frac{g^2}{c'^{2a}}$, $\left|f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z}\right|$ offenbar kleiner als $f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}}$, also $|D(z)|$ kleiner als

$$G_2 = \frac{g^2}{c'^{2a}} + f(1)^2 \frac{2\pi}{e^{\pi c'} - e^{-\pi c'}}.$$

Jede Zahl G, die grösser als G_1 und G_2 ist, wird also für keinen Werth des Streifens, mithin nach *A.* überhaupt für keinen Werth von z erreicht.

Aus den unter *B.* und *C.* genannten Eigenschaften der Differenz kann man bekanntlich folgern, dass dieselbe einer Constanten gleich ist, und da $D(z)$ nach (3.) mit unendlich wachsendem ζ' verschwindet, muss diese Constante Null sein, d. h.

$$\varphi(z) - f(1)^2 \frac{\pi}{\sin \pi z} = 0.$$

Hiermit ist der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Satz bewiesen.

§ 2.

Wir zeigen jetzt, dass *nur eine einzige Function $F(z)$ der complexen Veränderlichen z existiren kann, welche folgenden Bedingungen genügt:*

I. *$F(z)$ ist für alle Werthe $z = \zeta + \zeta' i$, für welche $a \leqq \zeta \leqq a+1$ ist, holomorph und dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}g$ (a und g sind, wie in § 1, reelle positive Grössen).*

II. *Die Gleichung $F(z+1) = zF(z) + c$ besteht für jeden Werth von z.*

III. $F(1) = C$.

Für den Fall $C = c$ tritt dazu noch die Bedingung

III^a. *$F(z)$ hat im Punkte $z = 0$ keine durch Abänderung des einzelnen Werthes $F(0)$ hebbare Unstetigkeit.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach; denn wenn zwei Functionen existirten, welche die vorstehenden Eigenschaften besässen, so würde ihre Differenz $f(z)$ offenbar den in § 1 aufgestellten Bedingungen I. und II.

genügen, und es würde zugleich $f(1) = 0$ sein. Nach dem Satze der vorigen Nummer wäre also

$$(4.)\quad f(z)f(1-z) = f(1)^2\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist Null für alle endlichen Werthe von z, für die $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ endlich ist, d. h. für alle Werthe ausser den ganzzahligen. Hieraus folgt, wie wir gleich zeigen werden, dass $f(z)$ nur an den Stellen $0, -1, -2, \dots$ von 0 verschieden sein kann.

Bezeichnen wir nämlich mit z_0 irgend einen in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ nicht vorkommenden endlichen Werth von z, so kann man mit Benutzung der Gleichung $f(z+1) = zf(z)$ die Function $f(z)$ auf die Form bringen

$$(5.)\quad f(z) = R(z)f(z\pm n),$$

sodass $z_0\pm n = \zeta+\zeta' i$ in dem unter I. definirten Streifen liegt, während die rationale Function $R(z)$ in der Umgebung von z_0 endlich und von 0 verschieden ist. $f(z\pm n)$ lässt sich dann wegen I. nach Potenzen von $z-z_0$ entwickeln, also auch $f(z)$. Hätte nun $f(z_0)$ einen von 0 verschiedenen Werth, so würde sich um den Punkt z_0 ein kleiner Kreis beschreiben lassen, innerhalb dessen $f(z)$ überall von 0 verschieden wäre. Für alle innerhalb dieses Kreises gelegenen Werthe von z müsste wegen (4.) $f(1-z)$ gleich 0 sein. Bringen wir nun $f(1-z)$ gleichfalls auf die Form

$$(6.)\quad f(1-z) = R_1(z)f(1-z\pm n_1),$$

sodass $1-z_0\pm n_1 = \zeta_1+\zeta_1' i$ in dem unter I. definirten Streifen liegt, während die rationale Function $R_1(z)$ in der Umgebung von z_0 von 0 verschieden ist, so müsste der Factor von $R_1(z)$ für alle innerhalb eines kleinen Kreises gelegenen Werthe von z verschwinden, d. h. $f(z)$ wäre innerhalb eines um den Punkt $z = 1-z_0\pm n_1$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises überall Null. Es wäre also nach einem bekannten Satze die Function $f(z)$ innerhalb des Streifens, in dem sie monogen ist, überall Null, mithin wegen (5.) auch $f(z_0) = 0$. Dies wäre aber ein Widerspruch, da $f(z_0)$ von 0 verschieden angenommen war.

Die Function $f(z)$ ist also jedenfalls gleich 0 für alle Werthe von z, die nicht in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vorkommen. Wegen I. ist sie also auch 0 für denjenigen ganzzahligen Werth (resp. diejenigen Werthe), welcher

in dem unter I. definirten Streifen liegt. Daraus folgt nach II., dass $f(z)$ für alle positiven ganzzahligen Werthe 0 ist. Es bleibt schliesslich die Möglichkeit eines von 0 verschiedenen Werthes von $f(z)$ nur für die Argumente $z = 0, -1, -2, \dots$ übrig.

Die Function $F(z)$ ist hiernach durch die Bedingungen I.—III. dieses Paragraphen vollständig bestimmt bis auf die Stellen $0, -1, -2, \dots$. Sie ist aber auch an diesen Stellen bestimmt, wenn die in II. und III. vorkommenden Constanten C und c von einander verschieden sind. Denn in diesem Falle folgt aus II:

$$zF(z) = F(z+1)-c,$$

also

$$[zF(z)]_{z=0} = C-c$$

und

$$F(0) = \infty;$$

allgemein

$$F(-n) = \frac{F(-n+1)-c}{-n},$$

d. h. $F(-1)$, $F(-2)$, ... der Reihe nach gleich ∞.

Ist dagegen $C = c$, so giebt die Bedingung II.:

$$(7.) \quad F(z) = \frac{F(z+1)-F(1)}{z}.$$

Da nun bei geeigneter Wahl der ganzen Zahl n die Function $F(n+z)$ wegen I. sich nach positiven Potenzen von z entwickeln lässt, so folgt wegen II., dass auch $F(z+1)$ sich entwickeln lässt. Die rechte Seite von (7.) nähert sich demnach mit unendlich abnehmendem z der bestimmten endlichen Grenze $F'(1)$. Mit Hinzuziehung von III^a. ist dann auch $F(0) = \lim_{z=0} F(z)$ bestimmt und hat den Werth $F'(1)$. Durch wiederholte Anwendung von II. erhält man schliesslich

$$F(-n) = c\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)+\frac{(-1)^n}{n!}F'(1).$$

Der am Anfang dieser Nummer aufgestellte Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

Die durch die Bedingungen I.—III. resp. I.—III^a. definirte Function $F(z)$ ist nach den Bezeichnungen des Herrn ***Prym*** gleich

$$(C-c)P(z)+(C-c+ce)Q(z).$$

Dies soll in dem folgenden Paragraphen nachgewiesen werden.

§ 3.

Durch die von 0 bis 1 und von 1 bis ∞ genommenen Integrale des Ausdruckes $e^{-x}x^{z-1}dx$ werden zwei Functionen $P(z)$ und $Q(z)$, letztere für alle, erstere für die rechts von der imaginären Axe gelegenen Werthe von z definirt. Diese Functionen genügen, was sich aus der partiellen Integration ergiebt, den Bedingungen II. und III. des vorigen Paragraphen, wenn darin einmal

$$c = -\frac{1}{e}, \quad C = 1 - \frac{1}{e},$$

und dann

$$c = \frac{1}{e}, \quad C = \frac{1}{e}$$

gesetzt wird. Für die Function $Q(z)$ gilt überdies die Bestimmung III^a. Offenbar kann man durch wiederholte Anwendung der Functionalgleichung II. den Bereich, in welchem die Function $P(z)$ definirt ist, schrittweise nach links erweitern und schliesslich auf ganz beliebige Werthe von z ausdehnen.

Wir können nun zeigen, dass die Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ auch der Bedingung I. genügen.

Aus den evidenten Beziehungen

$$|e^{-x}x^{\zeta+\zeta' i-1}| \leqq e^{-x}x^{a-1} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ \zeta \geqq a \end{cases}$$

$$|e^{-x}x^{\zeta+\zeta' i-1}| \leqq e^{-x}x^{a} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 1 \leqq x \\ \zeta \leqq a+1 \end{cases}$$

folgt nämlich zunächst unmittelbar

$$\left.\begin{array}{l} |P(\zeta+\zeta' i)| \leqq P(a) \\ |Q(\zeta+\zeta' i)| \leqq Q(a+1) \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad a \leqq \zeta \leqq a+1,$$

sodass für die unter I. mit $\frac{1}{2}g$ bezeichnete Constante jeder Werth angenommen werden kann, der grösser ist als $P(a)$ resp. $Q(a+1)$.

Es bleibt übrig, zu beweisen, dass die Integrale $P(z)$ und $Q(z)$ holomorphe Functionen von z darstellen. Hierzu dient der folgende allgemeine Satz*):

*) Einen Beweis dieses — wohl auch sonst bekannten — Satzes hat Verf. in seiner Habilitationsschrift „Ueber einige bestimmte Integrale, betrachtet als Functionen eines complexen Parameters" gegeben.

„Wenn $f(x, z)$ und $\frac{\partial}{\partial z} f(x, z)$ in einem endlichen Gebiete G der complexen Veränderlichen z eindeutige, stetige Functionen von x und z sind, solange $x_0 \leqq x \leqq x_1$ ist; oder wenn für den Fall, dass für $x = x_1$ diese Bedingung nicht mehr gilt, die Integrale

$$\int_{x_1-\delta}^{x_1} f(x, z)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1-\delta}^{x_1} \frac{\partial}{\partial z} f(x, z)\,dx$$

mit abnehmendem δ im ganzen Gebiete G „gleichmässig" gegen Null convergiren, so ist der Differentialquotient der Function $\int_{x_0}^{x_1} f(x, z)\,dx$ innerhalb des Gebietes G von der Richtung der Differentiation unabhängig, endlich und gleich $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial z} f(x, z)\,dx$. Für $x = \infty$ ist $\frac{1}{\delta}$ statt $x_1 - \delta$ zu setzen."

Aus diesem Satze folgt, dass der Differentialquotient von $P(z)$ sowohl, wie von $Q(z)$, endlich und von der Richtung der Differentiation unabhängig ist für $a \leqq \zeta \leqq a+1$, wenn wir $a > 1$ annehmen. Denn unter dieser Voraussetzung sind

$$f(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) = e^{-x} x^{z-1} \lg x$$

eindeutige und stetige Functionen von x und z für alle Werthe x von einschliesslich 0 bis einschliesslich 1, und für alle Werthe x von 1 bis ∞. Ausserdem übersteigen die absoluten Beträge der Integrale

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{z-1} \lg x\,dx$$

nicht die Grössen

$$\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} e^{-x} x^{a} \lg x\,dx,$$

convergiren also mit abnehmendem δ gleichmässig gegen Null.

Da nun bekanntlich jede Function einer complexen Veränderlichen, deren Differentialquotient in einem Gebiete überall endlich und von der Richtung der Differentiation unabhängig ist, in diesem Gebiete holomorph ist*), erfüllen die Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ auch die Bedingung I. von § 2 vollständig.

---

*) Vergl. *Harnack*. Mathem. Ann. 21 p. 306—311.

Wir hatten den Constanten C und c specielle Werthe gegeben, um zu den Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ zu gelangen. Die Function

$$(C-c)P(z)+(C-c+ec)Q(z)$$

genügt den Bedingungen I.—III. resp. I.—III^a. für ganz beliebige Werthe dieser Constanten und ist nach § 2 die einzige Function, welche diese Eigenschaft besitzt.

§ 4.

Wir wollen nun zeigen, dass die in § 2 aufgestellten Eigenschaften der Function $F(z)$ genügen, um analytische Ausdrücke für dieselbe herzuleiten. Setzen wir $c=0$, $C=1$, so geht $F(z)$ über in

$$\Gamma(z) = P(z)+Q(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx.$$

Wir beginnen mit diesem speciellen Falle.

Nach den in § 1 gemachten Entwickelungen folgt aus dem für die Function $\Gamma(z)$ gültigen System von Bedingungen zunächst die wichtige Relation

$$(8.)\qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Aus derselben erkennt man, dass $\Gamma(z)$ für keinen endlichen Werth von z, der nicht in der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ vorkommt, verschwinden kann. Denn sonst müsste $\Gamma(1-z)$ unendlich gross sein, woraus wegen der Gleichung

$$(9.)\qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

folgen würde, dass auch $\Gamma(1-z\pm n)$ unendlich ist; diese Annahme würde aber bei geeigneter Wahl der ganzen Zahl n mit der Bedingung I. unverträglich sein.

Was nun die Stellen $z=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ betrifft, so ist nach III. $\Gamma(1)=1$, also nach II. $\Gamma(n)=n!$, $\Gamma(0)$ und $\Gamma(-n)$ gleich ∞.

$\Gamma(z)$ verschwindet also überhaupt für keinen endlichen Werth von z. Die Function wird, wie wir eben sahen, unendlich, und zwar ∞^1, nur an den Stellen $0, -1, -2, \ldots -n, \ldots$ mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$. Dementsprechend wird $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ ebenfalls nur an den Stellen $0, -1, -2, \ldots$ unendlich gross, und zwar ∞^1 mit dem Residuum -1; $\frac{d^2 \lg \Gamma(z)}{dz^2}$ wird an denselben

Stellen, und nur da, unendlich, und zwar ∞^2, das Residuum ist 0, der Coefficient der -2ten Potenz 1.

Dieses Verhalten der zweiten logarithmischen Ableitung von $\Gamma(z)$ führt unmittelbar auf die Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Die Differenz

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z)-\sum_0^\infty\frac{1}{(z+n)^2}$$

lässt sich offenbar in der Umgebung jedes endlichen Werthes $z = z_0$ nach positiven Potenzen von $z-z_0$ entwickeln und muss daher einer beständig convergirenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ gleich sein. Damit gewinnen wir die Gleichung

$$(10.)\qquad \frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z) = \sum_0^\infty\frac{1}{(z+n)^2}+\mathfrak{P}(z).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung convergirt in jedem endlichen Gebiete von z, welches keinen der Punkte $z = 0, -1, -2, \dots$ enthält, gleichmässig und kann demnach zwischen den Grenzen k und z gliedweise integrirt werden. Dies giebt, wenn man die links auftretende Constante auf die rechte Seite zieht,

$$(11.)\qquad \frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = \sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{z+n}\right)+\mathfrak{P}_1(z).$$

Die rechte Seite der Gleichung (11.) convergirt ebenfalls gleichmässig in jedem endlichen Gebiete, welches keinen der Punkte $z = 0, -1, -2, \dots$ enthält. Dies braucht nicht aus der analytischen Form, in welcher die rechte Seite gegeben ist, bewiesen zu werden, sondern ist eine unmittelbare Folge des mit der Gleichung (10.) vorgenommenen Integrationsprocesses. Da wir nämlich die Zahl m so bestimmen können, dass in einem Gebiete, welches die Stellen k und z enthält, die Summe $\sum_{m+1}^\infty\frac{1}{(z+n)^2}$ überall absolut kleiner als die beliebig vorgegebene Grösse δ wird, muss für denselben Werth von m das Integral jener Summe, d. h. der Ausdruck $\sum_{m+1}^\infty\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{z+n}\right)$, nothwendig kleiner als $\delta(kz)$ sein; wo (kz) die absolute Länge einer von k nach z gezogenen, ganz im Gebiete verlaufenden Integrationscurve ist. Die Bedingung für die gleichmässige Convergenz der Summe $\sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+n}-\frac{1}{z+n}\right)$ ist also erfüllt.

Durch nochmalige Integration von k_1 bis z erhalten wir

$$(12.)\qquad \lg \Gamma(z) = \sum_{0}^{\infty}\Big(\lg\Big(\frac{k_1+n}{z+n}\Big)+\frac{z-k_1}{k+n}\Big)+\mathfrak{P}_2(z),$$

und daraus

$$(13.)\qquad \Gamma(z) = e^{\mathfrak{P}_2(z)}\prod_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{k_1+n}{z+n}\Big)e^{\frac{z-k_1}{k+n}}.$$

Die rechte Seite von (12.) muss aus demselben Grunde, wie die rechte Seite von (11.), convergiren, und zwar in jedem endlichen Gebiete, welches keinen der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ enthält, gleichmässig. ***Hierdurch werden alle directen Beweise für die Convergenz des Productes auf der rechten Seite der Gleichung* (13.) *überflüssig.***

Die rechte Seite von (13.) genügt unter allen Umständen der Bedingung I. von § 2. Die Bedingungen II. und III. werden, wie man sich leicht überzeugt, erfüllt, wenn man setzt

$$(14.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_2(z) = pz+q; \\ p = -\lim\limits_{n=\infty}\Big(\sum\limits_{\mu=0}^{n}\frac{1}{k+\mu}-\lg(k+n)\Big), \\ q = \lim\limits_{n=\infty}\Big(\sum\limits_{\mu=0}^{n}\frac{1}{k+\mu}-\lg(k_1+n)\Big)-\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\Big(\lg\frac{k_1+\mu}{1+\mu}-\frac{k_1-1}{k+\mu}\Big). \end{cases}$$

Da nur eine einzige Function existirt, welche den Bedingungen I.—III. genügt, so ist der durch (13.) und (14.) gegebene analytische Ausdruck von den Werthen der Constanten k und k_1 unabhängig. Für $k=k_1=1$ geht q über in die *Mascheroni*sche Constante λ, p in $-\lambda$, und man erhält den Ausdruck

$$(15.)\qquad \Gamma(z) = e^{\lambda(1-z)}\prod_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1+n}{z+n}e^{\frac{z-1}{1+n}}\Big),$$

welcher von dem *Euler-Gauss*schen Product $\Pi(z-1)$ nur durch die Schreibweise verschieden ist.

Zur analytischen Darstellung der Function $P(z)$ gelangen wir durch Benutzung der Bedingung II., aus deren wiederholter Anwendung für $c=-\frac{1}{e}$ die Formel hervorgeht:

$$P(z) = \frac{1}{e}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)}+\frac{P(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

Das erste Glied der rechten Seite nähert sich für jeden Werth von z mit wachsendem n einem Grenzwerthe, also hat auch das zweite Glied einen Grenzwerth. Bezeichnen wir denselben mit $P_2(z)$, den Grenzwerth des

ersten Gliedes mit $P_1(z)$, so wird

$$P(z) = P_1(z) + P_2(z).$$

Nun sieht man aber leicht, dass schon die Function $P_1(z)$ für sich allein den Bedingungen I.—III. genügt, wenn darin $c = -\frac{1}{e}$, $C = P(1) = 1 - \frac{1}{e}$ angenommen wird. Es muss also, da nur eine solche Function existiren kann, $P_2(z) = 0$ sein, und wir erhalten

$$(16.) \qquad P(z) = \frac{1}{e} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+\mu-1)}.$$

Eine zweite analytische Darstellung von $P(z)$ ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Aus den Bedingungen I.—III. geht hervor, dass $P(z)$ nur an den Stellen $0, -1, -2, \dots$ unendlich wird, und zwar ∞^1 mit dem Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$. Dieser Umstand führt zu der Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Man erkennt ohne Weiteres, dass diese Reihe allen Bedingungen I.—III. für $c = -\frac{1}{e}$, $C = 1 - \frac{1}{e}$ genügt. Die Reihe stellt mithin ebenfalls die Function $P(z)$ dar:

$$(17.) \qquad P(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Man erhält bekanntlich diese Darstellung direct aus dem Integral $\int_0^1 e^{-x} x^{z-1} dx$, wenn man e^{-x} nach Potenzen von x entwickelt und dann gliedweise integrirt.

Für die analytische Darstellung von $Q(z)$ ist es von Wichtigkeit, dass $C = c$ wird. Dies hat in Anbetracht der Bedingungen II. und III^a. zur Folge, dass die Function für keinen endlichen Werth von z unendlich gross wird und also durch eine beständig convergirende Potenzreihe dargestellt werden kann. Zur Bestimmung der Coefficienten dieser Potenzreihe kann die Relation

$$Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$$

benutzt werden, da die Potenzentwickelung von $\Gamma(z)$ und $P(z)$ für kleine Werthe von z durch Anwendung der Gleichungen (15.) und (17.) auszuführen ist. Wir gehen hierauf nicht näher ein *).

*) Cf. *Bourguet*, Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. Acta mathematica II, p. 261—295.

Berlin, den 15. November 1883.

Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

In der analytischen Geometrie der Strahlencomplexe und ihrer Gewebe ist die ausschliessliche Benutzung von Linien- oder Complex-Coordinaten aus formalen und aus sachlichen Gründen nicht allein berechtigt, sondern innerhalb gewisser Grenzen geradezu zu fordern. Erst wenn man von Punkt- und Ebenen-Coordinaten völlig absieht, erscheint dieser wichtige Zweig der Geometrie als selbständig und unabhängig von der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes. Zugleich treten die fundamentalen Wechselbeziehungen sich stützender (in Involution liegender) linearer Complexe, welche *Plücker* entgangen waren, bei grundsätzlicher Anwendung homogener Complex-Coordinaten alsbald in den Vordergrund, wie gleich die ersten einschlägigen Abhandlungen des Herrn *F. Klein* beweisen*).

Sehr unzweckmässig aber wäre es, wollte man auch bei der genaueren Untersuchung der mit den Complexen verknüpften Flächen die Benutzung der Punkt- und Ebenen-Coordinaten gänzlich vermeiden. Wir werden im Anschlusse an eine frühere Arbeit**) diese Coordinaten zugleich mit denjenigen der geraden Linien bei den Singularitätenflächen quadratischer Complexe benutzen. Von diesen *Kummer*schen Flächen vierten Grades werden uns neben anderen Curven auch diejenigen der Haupttangenten beschäftigen. Bekanntlich haben die Herren *F. Klein* und *M. S. Lie****) gefunden, dass diese Haupttangentencurven von der sechzehnten Ordnung

*) Man vergleiche insbesondere die Math. Annalen II S. 198 und 366.

**) Dieses Journal Bd. 95 S. 330.

***) *Klein* und *Lie* in den Berliner Monatsberichten, Sitzung vom 15. Dec. 1870, S. 891—899, und in den Math. Ann. XXIII. Vgl. die drei Abhandlungen derselben in den Math. Ann. V.

und sechzehnten Klasse sind, die 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen der zugehörigen *Kummer*schen Fläche zu Spitzen und stationären Schmiegungsebenen haben und je 96 stationäre Tangenten besitzen, deren Berührungspunkte sich auf sechs ausgezeichnete Haupttangentencurven achter Ordnung und achter Klasse gleichmässig vertheilen. Wir werden diese Sätze neu begründen und ausserdem nachweisen, dass die Haupttangentencurven einer *Kummer*schen Fläche mit einem beliebigen Punkte durch Flächen vierter Ordnung verbunden werden können. Diese Flächen liegen in einem Flächenbündel und bilden eine quadratische Mannigfaltigkeit, d. h. sie haben i. A. 64 Punkte mit einander gemein und durch jeden anderen Punkt gehen zwei von ihnen.

1. Wir bezeichnen mit A_i, B_i, X_i, Y_i für $i=1, 2, 3$ triëdrische Coordinaten der Punkte A, B, X, Y, oder auch die Verhältnisse von drei tetraëdrischen Coordinaten derselben zu der resp. vierten. Dann sind die homogenen Coordinaten x_i der Geraden AB oder x definirt durch die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = A_1 - B_1, \qquad \varrho x_2 = A_2 - B_2, \qquad \varrho x_3 = A_3 - B_3$$
$$\varrho x_4 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \quad \varrho x_5 = A_3 B_1 - A_1 B_3, \quad \varrho x_6 = A_1 B_2 - A_2 B_1,$$

worin ϱ ein unbestimmter Factor. Sie genügen der Bedingung $[x]=0$, wenn

$$[x] = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6.$$

Der Punkt X liegt auf AB oder x, wenn:

$$(X_1 - A_1):(A_1 - B_1) = (X_2 - A_2):(A_2 - B_2) = (X_3 - A_3):(A_3 - B_3)$$

ist, woraus folgt:

$$\text{(I.)} \qquad x_4 = X_3 x_2 - X_2 x_3, \quad x_5 = X_1 x_3 - X_3 x_1, \quad x_6 = X_2 x_1 - X_1 x_2.$$

Wenn anderseits die Gleichungen (I.) gelten, so verschwindet $[x]$, und die x_i sind die Coordinaten einer durch X gehenden Geraden; zugleich ergiebt sich:

$$X_1 x_4 + X_2 x_5 + X_3 x_6 = 0.$$

Die Ebene ξ geht durch die Gerade AB, wenn ihre Gleichung:

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 = 0$$

durch die Coordinaten der Punkte A und B befriedigt wird. Daraus folgt sofort:

$$\text{(II.)} \qquad \xi_4 x_1 = \xi_3 x_5 - \xi_2 x_6, \quad \xi_4 x_2 = \xi_1 x_6 - \xi_3 x_4, \quad \xi_4 x_3 = \xi_2 x_4 - \xi_1 x_5,$$

woraus $[x]=0$ und $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ sich ergiebt. Je zwei der Gleichungen (II.) sind die Bedingungen dafür, dass die Gerade x in der Ebene ξ liegt.

2. Wir wollen nunmehr mit x_i, y_i, z_i, b_i, ..., worin $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, die Coordinaten linearer Complexe $x, y, z, b, \ldots$ bezeichnen, sodass $[x]$ nur dann verschwindet, wenn x ein specieller Complex ist und alle seine Strahlen die Axe x schneiden. Die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k - \mu [bx]^2 = 0, \quad \text{worin} \quad [bx] = b_4 x_1 + b_5 x_2 + b_6 x_3 + b_1 x_4 + b_2 x_5 + b_3 x_6$$

und μ ein willkürlicher Parameter, repräsentirt dann einen Büschel quadratischer Complexengewebe Γ, welche sich in allen ihren gemeinschaftlichen Complexen berühren. Diese Berührungscomplexe stützen sich*) auf den linearen Complex b. Die in den Geweben enthaltenen quadratischen Complexe Γ_μ berühren sich **) in allen Strahlen einer quadratischen Congruenz von b.

Die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i z_k - \mu [bx][bz] = 0$ repräsentirt die Polare des Complexes x bezüglich eines beliebigen der Complexen-Gewebe Γ. Bezeichnen wir mit x' den Träger dieser Polare, sodass die Gleichung identisch wird mit $[x'z] = 0$, so ergiebt sich:

(III.) $\quad x'_{i\pm 3} = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \cdots + a_{6i} x_6 - \mu [bx] b_{i\pm 3}$ für $i \pm 3$ und $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Wenn nun die x_i und x'_i den drei Gleichungen $[x] = 0$, $[xx'] = 0$ und $[x'] = 0$ genügen, also zwei sich schneidende Gerade darstellen, so ist x ein singulärer Strahl des in Γ enthaltenen quadratischen Complexes Γ_μ; zugleich berühren x und x' in ihrem Schnittpunkte, dem singulären Punkte von x, die Singularitätenfläche Φ^4_μ von Γ_μ, und in demselben Punkte wird Φ^4_μ von der singulären Ebene xx' des Strahles x berührt***). Liegt der singuläre Strahl x in dem linearen Complexe b, ist also $[bx] = 0$, so wird x' unabhängig von μ, und die Fläche Φ^4_μ berührt die Ebene xx' im Schnittpunkte von x und x', welchen Werth μ auch haben möge.

3. Um nun die Gleichungen dieser Singularitätenfläche Φ^4_μ in Punkt- und Ebenen-Coordinaten aufzustellen, bezeichnen wir mit X und ξ den Schnittpunkt und die Verbindungsebene von x und x'. Ausser den sechs Gleichungen (III.) und der Gleichung:

$$0 = b_4 x_1 + b_5 x_2 + b_6 x_3 + b_1 x_4 + b_2 x_5 + b_3 x_6 - [bx]$$

haben wir dann die drei Gleichungen (I.) und die analogen:

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 95 S. 334.
**) Ebenda S. 336.
***) Ebenda S. 341—343.

$$(\mathrm{I}^a.)\quad x'_4 = X_3 x'_2 - X_2 x'_3,\quad x'_5 = X_1 x'_3 - X_3 x'_1,\quad x'_6 = X_2 x'_1 - X_1 x'_2,$$

welche ausdrücken, dass x und x' zwei durch X gehende Gerade sind. Eliminiren wir aus diesen 13 Gleichungen zunächst x'_4, x'_5, x'_6 und hernach die übrigen drei x'_i, die sechs x_i und $-\mu[bx]$, so erhalten wir für den Ort des Punktes X, also für die Fläche Φ^4_μ, die erste der beiden Gleichungen $P = 0$, $\Pi = 0$, worin:

$$(\mathrm{IV.})\quad \begin{cases} P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & X_3 & -X_2 & b_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & -X_3 & 0 & X_1 & b_5 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & X_2 & -X_1 & 0 & b_6 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & -X_3 & X_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & -X_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{vmatrix}; \\ \Pi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & \xi_4 & 0 & 0 & b_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & 0 & \xi_4 & 0 & b_5 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & 0 & 0 & \xi_4 & b_6 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & 0 & \xi_3 & -\xi_2 & b_1 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & -\xi_3 & 0 & \xi_1 & b_2 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & \xi_2 & -\xi_1 & 0 & b_3 \\ \xi_4 & 0 & 0 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_4 & 0 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_4 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Gleichung $\Pi = 0$ stellt die Singularitätenfläche Φ^4_μ in Ebenen-Coordinaten dar; sie ergiebt sich durch Eliminirung der x'_i und x_i aus (III.) und sechs Gleichungen (II.) und (II^a.), welche ausdrücken, dass x und x' zwei in der Ebene ξ liegende Gerade sind. Bezüglich der Coefficienten a_{ik} sind P und Π vom dritten Grade.

4. Die „*Kummer*sche" Fläche Φ^4_μ ist von der vierten Ordnung und der vierten Klasse, hat also i. A. 16 Doppel- oder Knotenpunkte und 16 Doppel- oder singuläre Berührungsebenen. Denn in ihren Gleichungen

$P=0$ und $\Pi=0$ heben sich die Glieder fünfter und sechster Ordnung in Bezug auf X_1, X_2, X_3 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 gegenseitig auf, und in $\Pi=0$ kann der Factor ξ_4^2 beseitigt werden; die Anzahl der Doppelpunkte und Doppelebenen aber ergiebt sich mittelst der Polarentheorie, indem jeder Doppelpunkt die Klassenzahl 36 der allgemeinen Fläche vierter Ordnung um zwei Einheiten vermindert.

Der Strahlencomplex Γ_μ und seine Singularitätenfläche Φ_μ^4 ändern sich nicht, wenn in ihren Gleichungen gesetzt wird $a_{14}+\lambda$, $a_{25}+\lambda$, $a_{36}+\lambda$ statt resp. a_{14}, a_{25}, a_{36}. In der That bewirkt man in der Determinante P diese Aenderung, wenn man zu den drei ersten Zeilen und Spalten beziehungsweise die mit λ multiplicirten drei vorletzten Zeilen und Spalten addirt.

Die Gleichungen $P=0$ und $\Pi=0$ haben die Form $\frac{A}{\mu}-B=0$ oder $A-B\mu=0$; die Singularitätenflächen Φ_μ^4 der quadratischen Complexe Γ_μ oder:

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k-\mu[bx]^2=0,\quad [x]=0$$

bilden folglich einen Büschel und zugleich eine Schaar von Flächen vierten Grades. Die Gleichungen $A=0$ und $B=0$ repräsentiren zwei Flächen Φ_0^4 und Φ_∞^4, von welchen Φ_0^4 als eine ganz beliebige *Kummer*sche Fläche vierten Grades zu betrachten ist; Φ_∞^4 ist, wie leicht einzusehen, die Singularitäten- oder Brennfläche der quadratischen Congruenz:

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k=0,\quad [bx]=0,\quad [x]=0,$$

in deren Strahlen die Complexe Γ_μ sich berühren, und kann für sich allein auch als eine beliebige *Kummer*sche Fläche vierten Grades betrachtet werden.

5. Die *Kummer*schen Flächen Φ_μ^4 berühren sich in ihren gemeinschaftlichen Punkten. Wir wissen bereits (2.), dass sie sich in den singulären Punkten aller in b enthaltenen singulären Strahlen der Complexe Γ_μ berühren; dass aber auch umgekehrt jeder gemeinschaftliche Punkt X der Flächen Φ_μ^4 zu diesen singulären Punkten gehört, lässt sich, wie folgt, zeigen. Die Coordinaten von X genügen den beiden Gleichungen $A=0$, $B=0$, wenn $P=\frac{A}{\mu}-B$ gesetzt wird; aus den neun Gleichungen (I.) und (III.) aber ergeben sich, nachdem x_4', x_5', x_6' aus (III.) mittelst (I^a.) eliminirt sind, die übrigen drei x_i', die sechs x_i und $\mu[bx]$ bis auf einen gemeinschaftlichen unbestimmten Factor, und zwar wird $\mu[bx]$ proportional zu $A=0$; und da μ einen beliebigen Werth annehmen kann, so muss $[bx]=0$ sein. Jeder singuläre Strahl x von Γ_μ, welcher von dem entsprechenden

Strahle x' in einem gemeinschaftlichen Punkte X der Φ_μ^4 geschnitten wird, liegt demnach in dem Complexe b, und die Flächen Φ_μ^4 berühren sich in X.

6. Der Punkt X ist Doppelpunkt von einer der Flächen Φ_μ^4, wenn in ihm zwei singuläre Strahlen x, y des zugehörigen Complexes Γ_μ von den ihnen (wegen (III.)) entsprechenden Strahlen x', y' geschnitten werden. Dann genügen aber auch $z_i = x_i + \lambda y_i$ und $z'_i = x'_i + \lambda y'_i$; den Gleichungen (I.), (I^a.) und (III.), und jeder Strahl z des Büschels xy ist folglich ein singulärer Strahl von Γ_μ und wird von dem entsprechenden Strahle z' des Büschels $x'y'$ im Punkte X geschnitten. Ein Doppelpunkt von Φ_μ^4 ist also von unendlich vielen singulären Strahlen z des Complexes Γ_μ der zugehörige singuläre Punkt. Diese Strahlen z und ihre entsprechenden z' bilden zwei projective Strahlenbüschel xy und $x'y'$; ihre singulären Ebenen zz' umhüllen folglich eine Kegelfläche zweiter Ordnung, den Tangentenkegel des Doppelpunktes. Während der Complexkegel eines beliebigen singulären Punktes in zwei Strahlenbüschel zerfällt, die den zugehörigen singulären Strahl mit einander gemein haben, reducirt sich derjenige des Doppelpunktes auf jenen einen Büschel singulärer Strahlen (vgl. 7.). Weil ein Strahl dieses Büschels in dem Complexe b enthalten ist, so liegt der Doppelpunkt auf der Curve, längs welcher die Flächen Φ_μ^4 sich berühren (5.).

7. Die Ebene ξ ist Doppelebene von einer der Flächen Φ_μ^4, wenn sie zwei und folglich (vgl. 6.) unendlich viele singuläre Strahlen x des zugehörigen Complexes Γ_μ mit den ihnen entsprechenden Strahlen x' verbindet. Sie ist die singuläre Ebene aller dieser Strahlen x und berührt Φ_μ^4 in den singulären Punkten xx' derselben, deren Ort ein (durch die projectiven Büschel der x und der x' erzeugter) Kegelschnitt ist. Während die Complexcurve einer beliebigen singulären Ebene in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfällt, reducirt sich diejenige der Doppelebene auf den Büschel ihrer singulären Strahlen x; denn jeder dieser Strahlen x muss den beiden Strahlenbüscheln der Doppelebene zugleich angehören. Einer der Strahlen x liegt in b; in dem zugehörigen singulären Punkte xx' wird deshalb die Doppelebene von allen Flächen Φ_μ^4 berührt.

8. Die *Kummer*schen Flächen Φ_μ^4 berühren sich längs einer Raumcurve achter Ordnung B^8 (5.); dieselbe tangirt alle Doppelebenen der Φ_μ^4 und ist der Ort ihrer Doppelpunkte (6., 7.). Die Doppelebenen der Φ_μ^4 bilden einen Ebenenbüschel achter Ordnung (vgl. 4.). Da der lineare Com-

plex b durch fünf beliebige singuläre Strahlen des Complexes Γ_0 gelegt werden kann, so ergiebt sich: Fünf beliebige Punkte einer *Kummer*schen Fläche Φ_0^4 können mit deren 16 Doppelpunkten durch eine Raumcurve B^8 achter Ordnung verbunden werden, längs welcher Φ_0^4 von unendlich vielen anderen *Kummer*schen Flächen Φ_μ^4 berührt wird. Zwei dieser Curven B^8 haben ausser den 16 Doppelpunkten von Φ_0^4 noch i. A. acht Punkte gemein; denn zwei lineare Complexe b, b' haben mit der biquadratischen Congruenz der singulären Strahlen von Γ_0 i. A. acht Strahlen gemein. Durch vier der acht Punkte sind alle acht bestimmt; sie können mit den Doppelpunkten der Φ_0^4 durch einen Büschel von Raumcurven B^8 verbunden werden, wie sofort einleuchtet, wenn b_i durch $b_i + \lambda b'_i$ ersetzt wird. Die *Kummer*schen Flächen Φ_μ^4, welche die Curven dieses Büschels mit einem beliebigen Punkte des Raumes verbinden, liegen in einem Flächenbündel und bilden in demselben eine quadratische Mannigfaltigkeit, weil ihre Gleichung in Bezug auf λ vom zweiten Grade ist und auf die Form $P + P_1\lambda + P_2\lambda^2 = 0$ gebracht werden kann.

9. Die Singularitätenfläche Φ_0^4 eines quadratischen Complexes Γ_0 wird auch von der Brennfläche Φ_∞^4 einer jeden in Γ_0 enthaltenen quadratischen Congruenz längs einer Raumcurve B^8 achter Ordnung berührt (4.); und zwar geht B^8 durch alle Doppelpunkte beider Flächen und tangirt deren Doppelebenen. Liegt die Congruenz in einem speciellen Complexe, besteht sie also aus den Strahlen von Γ_0, welche irgend eine Gerade g schneiden, so ist ihre Brennfläche eine *Plücker*sche „Meridianfläche" von Γ_0; denn sie enthält alle Complexcurven von Γ_0, deren Ebenen durch g gehen, und wird umhüllt von allen Complexkegeln von Γ_0, deren Mittelpunkte auf g liegen. Die Meridianfläche wird durch die Gleichungen (IV.) $P = 0$ und $\Pi = 0$ in Punkt- und in Ebenencoordinaten dargestellt, wenn darin $\mu = \infty$ und $b_i = g_i$ gesetzt wird. Ihre Berührungscurve B^8 mit Φ_0^4 geht durch die vier Schnittpunkte von Φ_0^4 und g, weil dieselben zu den Doppelpunkten der Meridianfläche gehören; sie wird folglich von g tangirt oder osculirt, wenn zwei oder drei dieser Schnittpunkte zusammenfallen. — Eine Complexcurve von Γ_0 berührt die Singularitätenfläche Φ_0^4 in vier Punkten, deren zugehörige singuläre Strahlen in der Curvenebene liegen.

10. Ein specieller Complex möge den quadratischen Γ_0 in zwei Strahlen s berühren, und seine Axe s' liege demgemäss in einem der sechs linearen „Fundamentalcomplexe" d, in Bezug auf welche Γ_0 und Φ_0^4 sich

selbst zugeordnet sind *). Dann berührt Φ_0^4 die zu s' gehörige Meridianfläche längs einer Raumcurve B^8, welche ebenso wie Φ_0^4 von s' in den beiden Punkten ss' tangirt wird (9.). Wenn nun die beiden Berührungsstrahlen s zusammenfallen, so vereinigen sich auch die Punkte ss'; die Gerade s' berührt Φ_0^4 und B^8 in diesem Falle vierpunktig in ss', ist also eine vierpunktige Haupttangente von Φ_0^4. Aber die beiden Strahlen s sind bezüglich jenes Fundamentalcomplexes d einander zugeordnet und können sich nur in einem Strahle von d vereinigen, welcher zu den singulären Strahlen von Γ_0 gehört, weil er den entsprechenden Strahl s' schneidet; dem Punkte ss' von Φ_0^4 ist alsdann seine eigene Berührungsebene ss' in Bezug auf d zugeordnet. Daraus folgt (vgl. 9.):

11. Die Brennfläche der quadratischen Congruenz, welche der Complex Γ_0 mit einem beliebigen d der sechs Fundamentalcomplexe gemein hat, berührt die Singularitätenfläche Φ_0^4 von Γ_0 längs einer Raumcurve D^8 achter Ordnung. Jeder Punkt dieser Curve ist in Bezug auf d seiner Berührungsebene an Φ_0^4 zugeordnet, jede Tangente der Curve ist folglich sich selbst und jede Schmiegungsebene derselben (als Verbindungsebene successiver Tangenten) ihrem Anschmiegungspunkte zugeordnet. Die Schmiegungsebenen der Curve D^8 fallen also mit den Berührungsebenen der Fläche Φ_0^4 in ihren Anschmiegungspunkten zusammen, und D^8 ist eine Haupttangentencurve von Φ_0^4. In jedem Punkte von D^8 wird Φ_0^4 von einer Haupttangente s' (welche die Curve D^8 schneidet) vierpunktig berührt (10.).

Die sechs Haupttangentencurven D^8 von Φ_0^4 sind nicht nur von der achten Ordnung, sondern auch von der achten Klasse. Sie berühren die Doppelebenen und gehen durch die Doppelpunkte von Φ_0^4, und schneiden sich ausserdem paarweise in je acht Punkten (8.), in welchen sie von vierpunktigen Haupttangenten der Φ_0^4 osculirt werden. Jede D^8 hat demnach 40 stationäre Tangenten.

12. In Bezug auf jeden der sechs Fundamentalcomplexe d sind die fünf übrigen und die quadratischen Congruenzen, welche sie mit Γ_0 gemein haben, sich selbst zugeordnet; dasselbe gilt folglich von den Brennflächen dieser Congruenzen und von den Haupttangentencurven D^8, längs welchen sie die Fläche Φ_0^4 berühren. Jeder Schmiegungsebene einer D^8 sind demnach bezüglich der sechs Fundamentalcomplexe ihr Anschmiegungspunkt

*) Vgl. dieses Journal Bd. 95, S. 339.

und ihre fünf übrigen Schnittpunkte mit D^8 zugeordnet; diese sechs Punkte liegen auf einem Kegelschnitt und ihre sechs Schmiegungsebenen berühren eine Kegelfläche zweiter Ordnung*). Die acht Punkte, welche zwei der Haupttangentencurven D^8 ausser den 16 Doppelpunkten von Φ_0^4 mit einander gemein haben, bilden mit ihren acht vierpunktigen Schmiegungsebenen zusammen eine Configuration 8_5, indem jede der acht Ebenen fünf von den acht Punkten enthält, und jeder der acht Punkte in fünf von den acht Ebenen liegt. Die übrigen Punkte und Schmiegungsebenen einer D^8 bilden zu je 16 die bekannten *Kummer*schen Configurationen 16_6.

13. Wir wenden uns nunmehr zu den übrigen Haupttangentencurven der *Kummer*schen Fläche Φ_0^4. Indem wir in den bisherigen Formeln $\mu = \theta$ annehmen, setzen wir:

$$(\text{V.})\quad \begin{cases} x'_{i\pm3} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{6i}x_6, \\ x''_{i\pm3} = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + \cdots + a_{6i}x'_6, \\ x'''_{i\pm3} = a_{1i}x''_1 + a_{2i}x''_2 + \cdots + a_{6i}x''_6, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

für $i \pm 3$ und $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dann wird:

$$[xx'] = \Sigma a_{ik}x_ix_k,\ \ 2[x'] = \Sigma a_{ik}x_ix'_k = [xx''],\ \ [x'x''] = \Sigma a_{ik}x'_ix'_k = \Sigma a_{ik}x_ix''_k = [xx'''],$$
$$2[x''] = \Sigma a_{ik}x'_ix''_k = [x'x'''] = \Sigma a_{ik}x_ix'''_k = [xx''''];$$

und zwar sind alle diese Ausdrücke quadratische Functionen der x_i. Beispielsweise ist

$$2[x'] = \Sigma a_{ik}x_ix'_k = \Sigma a'_{ik}x_ix_k,$$

wenn gesetzt wird:

$$a'_{ik} = a_{i1}a_{k4} + a_{i2}a_{k5} + a_{i3}a_{k6} + a_{i4}a_{k1} + a_{i5}a_{k2} + a_{i6}a_{k3};$$

zugleich wird:

$$x''_{i\pm3} = a'_{1i}x_1 + a'_{2i}x_2 + \cdots + a'_{6i}x_6.$$

14. Wenn $[x]$, $[xx']$ und $[x']$ verschwinden, so ist x ein singulärer Strahl des quadratischen Complexes Γ_0 und berührt dessen Singularitätenfläche Φ_0^4 im Punkte xx'; mit Φ_0^4 hat dieser Strahl ausserdem die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel gemein, auf welche die in der singulären Ebene xx' enthaltene Complexcurve von Γ_0 sich reducirt. Verschwindet auch $\Sigma a_{ik}x'_ix'_k = [x'x'']$, ist also auch x' ein Strahl von Γ_0, so vereinigt sich einer der beiden Mittelpunkte mit dem singulären Punkte xx' von x, und es wird x eine Haupttangente von Φ_0^4 in diesem Punkte. Diejenigen singu-

*) Nach *F. Klein*, Math. Ann. Bd. 2 S. 211; vgl. dieses Journal Bd. 76 S. 105.

lären Strahlen von Γ_0, welche Φ_0^4 osculiren, bilden sonach eine Strahlenfläche sechzehnter Ordnung, indem ihre Coordinaten x_i den vier quadratischen Gleichungen:

$$[x]=0, \quad [xx']=0, \quad [x']=0 \quad \text{und} \quad [x'x'']=0$$

genügen müssen. Ihre Osculations-Punkte, deren geometrischen Ort wir mit C_0 bezeichnen wollen, unterscheiden sich dadurch von den übrigen Punkten der Fläche Φ_0^4, dass in ihnen je eine der Ebenen ihrer zerfallenden Complexkegel die Φ_0^4 berührt. Das Reciproke gilt von diesen Berührungsebenen. Bezüglich eines jeden der sechs Fundamentalcomplexe d ist deshalb jedem Punkte der Curve C_0 eine Ebene zugeordnet, welche Φ_0^4 in einem Punkte von C_0 berührt; die Strahlenfläche sechzehnter Ordnung aber ist ebenso wie Γ_0 und Φ_0^4 sich selbst zugeordnet. Sechzehn Strahlen dieser Fläche sind in jedem der Fundamentalcomplexe enthalten; die 16 singulären Punkte derselben hat C_0 mit der zugehörigen Haupttangentencurve D^8 gemein.

15. Die Curve C_0, in deren Punkten die Fläche Φ_0^4 von singulären Strahlen des Complexes Γ_0 osculirt wird, ist eine Haupttangentencurve von Φ_0^4. Sei nämlich X ein Punkt dieser Curve, x der zugehörige singuläre Strahl und h die zweite, von x verschiedene Haupttangente von Φ_0^4 in X. Dann schneiden sich in h die Berührungsebenen von zwei auf h liegenden, unendlich nahe benachbarten Punkten X, Y der Fläche Φ_0^4. Zugleich ist h wie jede Tangente des Punktes X ein Strahl von Γ_0 (14.), liegt also auf dem Complexkegel des singulären Punktes Y. Die beiden Ebenen, in welche dieser Kegel zerfällt, schneiden sich in dem zu Y gehörigen singulären Strahle y, also in einer gegen x unendlich wenig geneigten Tangente von Y, und eine von ihnen verbindet y mit h, ist also die Berührungsebene von Φ_0^4 in Y. Die benachbarten Punkte X, Y gehören folglich beide der Curve C_0 an (14.), und ihre Verbindungslinie, die Haupttangente h von Φ_0^4 in X, berührt C_0 in demselben Punkte. Unsere Behauptung ist damit bewiesen*).

16. Um nun zu den Gleichungen der Curve C_0 zu gelangen, gehen wir aus von denjenigen quadratischen Complexen Γ_ν, welche durch die Congruenz der singulären Strahlen von Γ_0 gelegt werden können. Ihre Gleichungen sind (13., 14.):

*) Diesen Beweis verdanke ich Herrn *W. Stahl.*

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k - 2\nu [x'] = 0, \quad [x] = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma(a_{ik} - \nu a'_{ik}) x_i x_k = 0, \quad [x] = 0;$$

von ihren Singularitätenflächen Φ^4_ν gehen i. A. drei durch einen beliebigen Punkt und berühren i. A. drei eine beliebige Ebene, weil die Gleichungen derselben für ν vom dritten Grade sind (3.).

Wird $y_i = x'_i - \nu x''_i$ gesetzt, so ist y der Träger der Polare von x bezüglich des Complexengewebes $\Sigma(a_{ik} - \nu a'_{ik}) x_i x_k = 0$; es wird also x ein singulärer Strahl des Complexes Γ_ν, wenn:

$$[x], \quad [xy] = [xx'] - \nu [xx''] \quad \text{und} \quad [y] = [x'] - \nu [x'x''] + \nu^2 [x'']$$

verschwinden (vgl. 2.). Diese Bedingungen sind für alle Werthe von ν erfüllt, und x ist von allen Complexen Γ_ν ein singulärer Strahl, wenn die fünf quadratischen Functionen $[x]$, $[xx']$, $[xx''] = 2[x']$, $[x'x'']$ und $[x'']$ verschwinden. In diesem Falle sind x, x', x'' und y vier sich gegenseitig schneidende Strahlen, da auch $[x'y]$ und $[x''y]$ verschwinden; sie gehen also entweder durch einen Punkt, oder sie liegen alle in einer Ebene. Weil aber x und x' singuläre Strahlen von Γ_0 sind, welchen wegen (V.) die Strahlen x' und x'' entsprechen, so hat die Singularitätenfläche Φ^4_0 den Punkt $xx'x''y$ zum Doppelpunkt, resp. die Ebene $xx'x''y$ zur Doppelebene (6., 7.). Anderseits berührt die Ebene xy, wenn ν beliebig angenommen wird, die Singularitätenfläche Φ^4_ν des Complexes Γ_ν im Punkte xy. Daraus folgt:

17. Die Singularitätenflächen Φ^4_ν der quadratischen Complexe Γ_ν gehen durch alle Doppelpunkte und berühren alle Doppelebenen der *Kummer*schen Fläche Φ^4_0. Sie haben in diesen Punkten und Ebenen je eine gemeinschaftliche Tangente x, welche auf dem Berührungskegel des Doppelpunktes liegt, resp. die Berührungscurve der Doppelebene tangirt. Im Falle des Doppelpunktes nämlich liegen je zwei homologe Strahlen der projectiven Büschel xx' und $x'x''$ in einer Berührungsebene jenes Tangentenkegels (6.), und dem gemeinschaftlichen Strahle x' der Büschel entspricht bekanntlich in jedem derselben ein Strahl x resp. x'' des Kegels; um x aber dreht sich die Berührungsebene xy von Φ^4_ν, wenn ν sich ändert und y (wegen $y_i = x'_i - \nu x''_i$) den Büschel $x'x''$ beschreibt.

Die Schnittcurve von Φ^4_0 mit einer der Flächen Φ^4_ν geht demnach durch jeden Doppelpunkt xx' von Φ^4_0 zweimal und wird in demselben von x und einem anderen in xy liegenden Strahle des Tangentenkegels berührt. Wenn jedoch ν verschwindend klein wird und die Ebene xy mit xx' zusammenfällt, so vereinigt sich diese zweite Tangente mit der ersteren x.

Die Schnittcurve von Φ_0^4 mit Φ_ν^4 hat also, wenn ν unendlich klein ist, jeden Doppelpunkt xx' von Φ_0^4 zur Spitze und in ihm einen gemeinschaftlichen singulären Strahl x der Complexe Γ_ν zur Rückkehrtangente; sie hat ebenso jede Doppelebene von Φ_0^4 zur stationären Schmiegungsebene, und berührt in ihr einen der 32 gemeinschaftlichen singulären Strahlen der Γ_ν in seinem singulären Punkte. Diese Curve sechzehnter Ordnung, deren Gleichungen wir nunmehr aufsuchen wollen, ist, wie wir sehen werden, keine andere als die Haupttangentencurve C_0.

18. Die Punktgleichung $A = 0$ von Φ_0^4 geht über in die Gleichung $A_\nu = 0$ der Φ_ν^4, wenn darin $a_{ik} - \nu a'_{ik}$ statt a_{ik} gesetzt wird. In Bezug auf ν ist A_ν vom dritten Grade. Ist nach Potenzen von ν entwickelt:

$$A_\nu = A + A'\nu + A''\nu^2 + A'''\nu^3,$$

so lässt sich nachweisen, dass A' zu A proportional ist, dass also die Schnittcurve von Φ_0^4 und Φ_ν^4 für ein verschwindend kleines ν nicht durch $A = 0$ und $A' = 0$, sondern durch die Gleichungen $A = 0$ und $A'' = 0$ dargestellt wird.

Setzen wir nämlich $z_i = x_i + \nu_1 x'_i$ an Stelle von x_i, so geht $y_i = x'_i - \nu x''_i$ über in

$$z'_i = (x'_i + \nu_1 x''_i) - \nu(x''_i + \nu_1 x'''_i) = x'_i + (\nu_1 - \nu)x''_i - \nu_1 \nu x'''_i,$$

und z' ist der Träger der Polare von z bezüglich des Complexen-Gewebes $\Sigma(a_{ik} - \nu a'_{ik}) x_i x_k = 0$. Wenn nun $[x]$, $[xx']$ und $2[x'] = [xx'']$ verschwinden, so wird:

$$[z] = [x] + \nu_1 [xx'] + \nu_1^2 [x'] = 0, \quad \text{und wegen} \quad [x'x'''] = 2[x''] \text{ etc.,}$$
$$[zz'] = \nu_1(\nu_1 - 2\nu)[x'x''] - 2\nu_1^2 \nu [x''],$$
$$[z'] = (\nu_1 - \nu)[x'x''] + (\nu_1^2 - 4\nu_1\nu + \nu^2)[x''] - \nu_1\nu(\nu_1 - \nu)[x''x'''] + \nu_1^2\nu^2[x'''].$$

Ist ν unendlich klein und $\nu_1 = \nu$, so verschwinden $[z]$, $[zz']$ und $[z']$, abgesehen von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, und z ist ein singulärer Strahl von Γ_ν, der Punkt zz' aber fällt, da $z'_i = x'_i - \nu^2 x''_i$ wird, zusammen mit zx' oder xx' (vgl. auch die Rechnung in 19.). Der Ort Φ_ν^4 der singulären Punkte und Ebenen von Γ_ν ist also bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung identisch mit Φ_0^4, die Gleichung $A + A'\nu = 0$ ist identisch mit $A = 0$, also A' in der That proportional zu A. Durch Rechnung finden wir:

$$A' = 2(a_{14} + a_{25} + a_{36})A.$$

19. Wir wollen nunmehr beweisen, dass die Raumcurve $A = 0$,

$A''=0$ mit der Haupttangentencurve C_0 von Φ_0^4 zusammenfällt. Wir setzen $\nu_1^2-4\nu_1\nu+\nu^2=0$, sodass $\nu_1=(2\pm\sqrt{3})\nu$ unendlich klein wird wie ν, und nehmen an, dass $[x]$, $[xx']$, $[x']$ und $[x'x'']$ verschwinden, dass also Φ_0^4 vom Strahle x im Punkte xx' der Curve C_0 osculirt werde (14.). Dann wird z, abgesehen von unendlich kleinen Gliedern *dritter* Ordnung, ein singulärer Strahl von Γ_ν; denn es wird:

$$[z]=0,\quad [zz']=-2\nu_1^2\nu[x'']\quad \text{und}\quad [z']=-\nu_1\nu(\nu_1-\nu)[x''x''']+\nu_1^2\nu^2[x'''].$$

Für die Coordinaten X_i und X_i+dX_i der Punkte xx' und zz' gelten nun u. A. die Gleichungen (I.):

$$x_4+X_2x_3-X_3x_2=0,\quad z_4+(X_2+dX_2)z_3-(X_3+dX_3)z_2=0,$$
$$x_4'+X_2x_3'-X_3x_2'=0,\quad z_4'+(X_2+dX_2)z_3'-(X_3+dX_3)z_2'=0,\quad \text{u. s. w.,}$$

woraus wegen $z_i=x_i+\nu_1x_i'$ und $z_i'=x_i'+(\nu_1-\nu)x_i''-\nu_1\nu x_i'''$ folgt:

$$dX_2(x_3+\nu_1x_3')-dX_3(x_2+\nu_1x_2')=0$$

und

$$dX_2(x_3'+\overline{\nu_1-\nu}x_3'')-dX_3(x_2'+\overline{\nu_1-\nu}x_2'')=-(\nu_1-\nu)(x_4''+X_2x_3''-X_3x_2''),$$

abgesehen von Gliedern mit $\nu_1\nu$. Diesen und den analogen Gleichungen zufolge sind dX_1, dX_2, dX_3 von derselben Ordnung unendlich klein wie ν und ν_1, und es verhalten sich abgesehen von Grössen zweiter Ordnung:

$dX_1:dX_2:dX_3=x_1:x_2:x_3$, sodass auch $x_4+(X_2+dX_2)x_3-(X_3+dX_3)x_2=0$, u. s. w.

In der That bildet ja der Strahl z, auf welchem die beiden Punkte xx' und zz' liegen, mit x einen unendlich kleinen Winkel, da $z_i=x_i+\nu_1x_i'$ ist.

20. Der Punkt zz' von Φ_ν^4 liegt also, abgesehen von Grössen zweiter Ordnung, auf der Haupttangente x von Φ_0^4 in unendlich kleinem Abstande von deren Osculationspunkte xx'; sein Abstand von Φ_0^4 ist folglich unendlich klein von der *dritten* Ordnung, während i. A. ein Punkt von Φ_ν^4 einen unendlich kleinen Abstand zweiter Ordnung von Φ_0^4 hat. Die Flächen Φ_0^4 und Φ_ν^4 oder $A=0$ und $A_\nu=0$ schneiden sich folglich, wenn ν unendlich klein wird, in allen Punkten xx', in denen Φ_0^4 von singulären Strahlen des Complexes Γ_0 osculirt wird; ihre Schnittlinie ist die Haupttangentencurve C_0 von Φ_0^4 und wird durch die biquadratischen Gleichungen $A=0$, $A''=0$ dargestellt (18.); die gemeinschaftlichen Berührungsebenen von Φ_0^4 und Φ_ν^4 fallen mit den Schmiegungsebenen von C_0 zusammen. Also:

21. Die Haupttangentencurve C_0 der *Kummer*schen Fläche Φ_0^4 ist von der sechzehnten Ordnung und der sechzehnten Klasse; in ihr wird Φ_0^4

von einer anderen Fläche vierter Ordnung $A''=0$ geschnitten. Die C_0 hat die 16 Doppelpunkte von Φ_0^4 zu Spitzen und die 16 Doppelebenen dieser Fläche zu stationären Schmiegungsebenen (17.); sie tangirt die Kegelschnitte, in welchen Φ_0^4 von ihren Doppelebenen berührt wird (17., 7.). Bezüglich eines jeden der sechs Fundamentalcomplexe d ist die Curve C_0 sich selbst zugeordnet (14.). Sie hat 96 vierpunktige Haupttangenten von Φ_0^4 zu stationären Tangenten; von deren Osculationspunkten liegen je sechzehn auf den sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven D^8 (14., 11.), und bilden mit ihren Schmiegungsebenen zusammen je eine *Kummer*sche Configuration 16_6 (vgl. 12.).

22. Aehnlich wie C_0 erhalten wir die übrigen Haupttangentencurven C'_λ von Φ_0^4 mit Hülfe der unendlich vielen quadratischen Complexe Γ'_λ, von welchen Φ_0^4 die Singularitätenfläche ist. Wir setzen zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} 0 & x'_4 & x'_5 & x'_6 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x'_4 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ x'_5 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ x'_6 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ x'_1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ x'_2 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ x'_3 & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{vmatrix} = \Sigma \alpha_{ik} x'_i x'_k,$$

bezeichnen also mit α_{ik} einen der ersten Minoren der Discriminante:

$$\Delta_0 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} a_{66}$$

von $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$. Dann ist der Complex Γ''_0 in dem Complexen-Gewebe $\Sigma \alpha_{ik} x'_i x'_k = 0$ enthalten, wenn die x'_i laufende Complex-Coordinaten bezeichnen; Γ''_0 aber und die zugehörige Haupttangentencurve C'_0 von Φ_0^4 gehen über in Γ''_λ und C'_λ, wenn:

$$a_{14}+\lambda,\quad a_{25}+\lambda,\quad a_{36}+\lambda,\quad \Delta_\lambda \quad \text{statt resp.} \quad a_{14},\quad a_{25},\quad a_{36},\quad \Delta_0$$

gesetzt wird *). Da Γ''_∞ mit Γ'_0 zusammenfällt, so ist auch C'_∞ identisch mit C_0.

23. Die Gleichungen:

$$\Delta_0 x_{i\pm 3} = \alpha_{1i} x'_1 + \alpha_{2i} x'_2 + \cdots + \alpha_{6i} x'_6$$

liefern uns die Coordinaten des linearen Complexes x, auf welchen die Polare von x' bezüglich des Complexen-Gewebes $\Sigma \alpha_{ik} x'_i x'_k = 0$ sich stützt;

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 95 S. 343.

sie können ersetzt werden durch die früheren Gleichungen:

$$(\text{V.})\qquad x'_{i\pm3} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{6i}x_6,$$

deren Umkehrungen sie sind. Wenn $[x']$, $[x'x]$ und $[x]$ verschwinden, so ist x' ein singulärer Strahl von Γ''_0; derselbe osculirt die Fläche Φ^4_0 in seinem singulären Punkte $x'x$, wenn auch $\Sigma\alpha_{ik}x_ix_k$ verschwindet, und der Ort dieses Osculationspunktes ist die Haupttangentencurve C'_0. Letztere ist die Schnittcurve von Φ^4_0 mit der Singularitätenfläche Φ^4_ϱ des quadratischen Complexes:

$$\Sigma\alpha_{ik}x'_ix'_k - 2\varrho[x] = 0,\quad [x'] = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma(\alpha_{ik} - \varrho\alpha'_{ik})x'_ix'_k = 0,\quad [x'] = 0,$$

wenn ϱ verschwindend klein wird. Die Gleichung von Φ^4_ϱ ergiebt sich aus der früheren $A = 0$, wenn darin $\alpha_{ik} - \varrho\alpha'_{ik}$ statt a_{ik} gesetzt wird; aber sie ist, weil die α_{ik} fünfzeilige Determinanten darstellen, viel zu complicirt, als dass wir daraus die Gleichungen nicht allein von C'_0, sondern von allen Haupttangentencurven C'_λ ableiten könnten. Wir suchen deshalb zunächst die Gleichung von Φ^4_ϱ in brauchbarerer Form aufzustellen.

24. Die Polare von x' bezüglich des quadratischen Complexen-Gewebes:

$$\Sigma(\alpha_{ik} - \varrho\alpha'_{ik})x'_ix'_k = 0, \quad \text{worin} \quad \alpha'_{ik} = \alpha_{i1}\alpha_{k4} + \alpha_{i2}\alpha_{k5} + \cdots + \alpha_{i6}\alpha_{k3},$$

hat zum Träger einen linearen Complex y, dessen Coordinaten aus den Gleichungen:

$$y_{i\pm3} = x_{i\pm3} - \varrho' x_{i\pm3} \quad \text{oder} \quad y_i = x_i - \varrho' x_i$$

sich ergeben, wenn gesetzt wird (vgl. (V.)):

$$\Delta_0^{2\prime} x_{i\pm3} = \alpha'_{1i}x'_1 + \alpha'_{2i}x'_2 + \cdots + \alpha'_{6i}x'_6 = \Delta_0(\alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \cdots + \alpha_{6i}x_6).$$

Da umgekehrt

$$x_{i\pm3} = a_{1i}{}'x_1 + \cdots + a_{6i}{}'x_6$$

wird (23.), so folgt:

$$(\text{VI.})\qquad a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \cdots + a_{6i}y_6 = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{6i}x_6 - \varrho x_{i\pm3}.$$

Nun sind aber x' und y specielle Complexe, deren Axen sich in einem Punkte X der gesuchten Fläche Φ^4_ϱ schneiden, wenn:

$$(\text{VII.})\qquad \begin{cases} y_4 = X_3y_2 - X_2y_3, & y_5 = X_1y_3 - X_3y_1, \quad y_6 = X_2y_1 - X_1y_2, \\ x'_4 = X_3x'_2 - X_2x'_3, & x'_5 = X_1x'_3 - X_3x'_1, \quad x'_6 = X_2x'_1 - X_1x'_2 \end{cases}$$

ist; die Punktgleichung von Φ_ϱ^4 ergiebt sich demnach, wenn die y_i, x_i' und x_i aus den 18 Gleichungen (V.), (VI.), (VII.) eliminirt werden.

Wir eliminiren zunächst x_4', x_5', x_6', ordnen die übrig bleibenden 15 Gleichungen nach

$$-x_1,\ -x_2,\ -x_3,\ -x_4,\ -x_5,\ -x_6,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ x_1',\ x_2',\ x_3'$$

und eliminiren diese 15 Variabeln. Wir erhalten dann für Φ_ϱ^4 eine Gleichung $D_\varrho = 0$, worin D_ϱ eine symmetrische, fünfzehnzeilige Determinante bezeichnet. Schreiben wir von D_ϱ nur die erste, zweite, siebente, achte und letzte Zeile hin, so ist:

$$D_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41}-\varrho & a_{51} & a_{61} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52}-\varrho & a_{62} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 & -X_2 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_3 & 0 & X_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

D_ϱ ist in Bezug auf ϱ vom dritten und bezüglich der X_i vom vierten Grade. Für $\varrho = 0$ wird $D_0 = -\Delta_0 A$, wenn $A = 0$ wie früher (4.) die Fläche Φ_0^4 darstellt.

25. Die Determinante D_ϱ formen wir um, indem wir ihre ersten sechs Zeilen und sechs Spalten mit -2 multipliciren, dann zu ihnen die folgenden sechs Zeilen und Spalten der Reihe nach addiren und endlich die ersten 12 Zeilen mit -2 dividiren. Wir finden:

$$-8D_\varrho = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\varrho & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & X_3 & -X_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varrho & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & -X_3 & 0 & X_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 & -X_2 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_3 & 0 & X_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun mögen D_ϱ und Φ_ϱ^4 übergehen in $D_{\varrho,\lambda}$ und $\Phi_{\varrho,\lambda}^4$, wenn $a_{14}+\lambda$, $a_{25}+\lambda$, $a_{36}+\lambda$ statt resp. a_{14}, a_{25}, a_{36} gesetzt wird. Wir erhalten dann, indem wir

$$2\varrho-\lambda = -\lambda_1 \quad \text{oder} \quad 2\varrho = \lambda-\lambda_1$$

setzen:

$$-8D_{\varrho,\lambda} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & X_3 & -X_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & -X_3 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & X_2 & -X_1 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & X_3 & -X_2 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -X_3 & 0 & X_1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & X_2 & -X_1 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X_3 & X_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -X_3 & X_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 & 0 & -X_1 & 0 & 1 & 0 & X_3 & 0 & -X_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -X_2 & X_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dieses leuchtet sofort ein, wenn die mit λ multiplicirten drei letzten Zeilen und Spalten dieser Determinante beziehungsweise zu der ersten, zweiten, dritten und zu der siebenten, achten, neunten Zeile resp. Spalte addirt werden.

26. Die Determinante $-8D_{\varrho,\lambda}$ ist für ϱ und folglich auch für λ_1 vom dritten und für die X_i vom vierten Grade; sie ändert sich nicht, wenn λ_1 mit λ vertauscht wird. Nach Potenzen von λ und λ_1 entwickelt wird demnach:

$$-D_{\varrho,\lambda} = A_{00}+A_{11}\lambda\lambda_1+A_{22}\lambda^2\lambda_1^2+A_{33}\lambda^3\lambda_1^3+(A_{01}+A_{12}\lambda\lambda_1+A_{23}\lambda^2\lambda_1^2)(\lambda+\lambda_1)$$
$$+(A_{02}+A_{13}\lambda\lambda_1)(\lambda^2+\lambda_1^2)+A_{03}(\lambda^3+\lambda_1^3);$$

und zwar sind die A_{ik} biquadratische Functionen der Punktcoordinaten X_i. Wird die letzte Determinante i-mal nach λ und k-mal nach λ_1 differentiirt und in dem Differentialquotienten $\lambda=\lambda_1=0$ gesetzt, so ergiebt sich $8i!k!A_{ik}$.

Für $\varrho=0$ oder $\lambda_1=\lambda$ wird $D_{0\lambda}=-\Delta_\lambda A_\lambda=-\Delta_\lambda A$ (24., 4.); setzen wir $\lambda_1=\lambda-2\varrho$ und entwickeln nach Potenzen von -2ϱ, so wird demnach:

$$-D_{\varrho,\lambda} = \Delta_\lambda A-2B\varrho+4C\varrho^2-8D\varrho^3,$$

worin:

$$\text{(VIII.)}\quad \begin{cases} \Delta_\lambda A = A_{00}+2A_{01}\lambda+(A_{11}+2A_{02})\lambda^2+2(A_{12}+A_{03})\lambda^3+(A_{22}+2A_{13})\lambda^4+2A_{23}\lambda^5+A_{33}\lambda^6, \\ B = A_{01}+(A_{11}+2A_{02})\lambda+3(A_{12}+A_{03})\lambda^2+2(A_{22}+2A_{13})\lambda^3+5A_{23}\lambda^4+3A_{33}\lambda^5, \\ C = A_{02}+(A_{12}+3A_{03})\lambda+(A_{22}+3A_{13})\lambda^2+4A_{23}\lambda^3+3A_{33}\lambda^4, \\ D = A_{03}+A_{13}\lambda+A_{23}\lambda^2+A_{33}\lambda^3. \end{cases}$$

In Uebereinstimmung mit früheren Ergebnissen (18.) wird also $2B = \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial \lambda} \cdot A$ proportional zu A, und die Gleichungen $A = 0$, $C = 0$ repräsentiren die Haupttangentencurve C'_λ von Φ^4_0, in welcher diese Fläche von $\Phi^4_{\varrho,\lambda}$ geschnitten wird, wenn ϱ unendlich klein ist.

27. Die Discriminante Δ_λ von $\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda[x] = 0$ ist für λ vom sechsten Grade; setzen wir:

$$\Delta_\lambda = \Delta_0 + \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda^2 + \cdots + \Delta_6\lambda^6,$$

so wird

$$\Delta_6 = -1, \quad \Delta_5 = -2(a_{14} + a_{25} + a_{36}), \quad \text{u. s. w.},$$

und die fünf ersten Coefficienten Δ_i sind Invarianten des quadratischen Complexes $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $[x] = 0$. Weil aber die erste Gleichung (VIII.) für alle Werthe von λ gilt, so ergiebt sich:

$$A_{00} = \Delta_0 A, \quad 2A_{01} = \Delta_1 A, \quad A_{11} + 2A_{02} = \Delta_2 A, \quad A_{12} + A_{03} = \tfrac{1}{2}\Delta_3 A,$$
$$A_{22} + 2A_{13} = \Delta_4 A, \quad 2A_{23} = \Delta_5 A, \quad A_{33} = \Delta_6 A,$$

und es wird deshalb:

$$2C = -A_{11} - 4A_{12}\lambda - A_{22}\lambda^2 + (\Delta_2 + 3\Delta_3\lambda + 3\Delta_4\lambda^2 + 4\Delta_5\lambda^3 + 6\Delta_6\lambda^4)A,$$
$$2D = -2A_{12} - A_{22}\lambda + (\Delta_3 + \Delta_4\lambda + \Delta_5\lambda^2 + 2\Delta_6\lambda^3)A.$$

Die Gleichungen $A = 0$, $C = 0$ der Haupttangentencurve C'_λ können wir folglich ersetzen durch:

$$A = 0, \quad A_{11} + 4A_{12}\lambda + A_{22}\lambda^2 = 0$$

oder

$$A = 0, \quad (A_{11} + \alpha A) + 4(A_{12} + \alpha' A)\lambda + (A_{22} + \alpha'' A)\lambda^2 = 0.$$

Wir schliessen daraus:

28. Die Haupttangentencurven C'_λ der *Kummer*schen Fläche Φ^4_0 können mit einem beliebigen Punkte P durch Flächen F^4 vierter Ordnung verbunden werden; denn die Constanten α, α', α'' können so bestimmt werden, dass alle durch die letzte Gleichung repräsentirten Flächen durch P gehen. Diese Flächen F^4 liegen in einem Flächenbündel und bilden in demselben eine quadratische Mannigfaltigkeit; denn sie schneiden sich i. A. in 64 Punkten und durch jeden anderen Punkt gehen i. A. zwei von ihnen. Sechs dieser Flächen berühren die Φ^4_0 längs den sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven D^8; die übrigen Haupttangentencurven C'_λ sind von der 16. Ordnung und der 16. Klasse und haben dieselben Eigenschaften wie $C_0 = C'_\infty$ (22., 21.).

Die Flächen $A_{11}+4A_{12}\lambda+A_{22}\lambda^2 = 0$ werden eingehüllt von der Fläche achter Ordnung $A_{11}A_{22}-4A_{12}^2 = 0$; dieselbe geht durch die 16 Kegelschnitte, in welchen Φ_0^4 von ihren 16 Doppelebenen berührt wird und welche die Haupttangentencurven C'_λ einhüllen (21.).

29. Alle Flächen vierter Ordnung, welche durch die Haupttangentencurven von Φ_0^4 gelegt werden können, liegen in einem Flächengebüsche; dasselbe enthält die vier Flächen:

$$A = 0, \quad A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{22} = 0$$

und ist i. A. durch sie bestimmt, es geht auch durch alle Flächen $\Phi_{\varrho,\lambda}^4$. Die Schnittcurve von je zwei Flächen dieses Gebüsches geht durch alle Doppelpunkte von Φ_0^4 und hat mit dieser Fläche i. A. noch 32 andere Punkte gemein, in welchen zwei Haupttangentencurven C'_λ sich schneiden. Diese 32 Punkte und die 32 Ebenen, welche in ihnen den beiden C'_λ sich anschmiegen und Φ_0^4 berühren, bilden eine Configuration 32_7, die aus zwei einander um- und eingeschriebenen *Kummer*schen Configurationen 16_6 besteht (vgl. 12., 21.); und zwar schmiegen die 16 Ebenen der einen Configuration 16_6 in je einem Punkte der andern den beiden Haupttangentencurven sich an. Bezüglich der sechs Fundamentalcomplexe d sind nämlich die Curven C'_λ sich selbst zugeordnet, und folglich jeder Schmiegungsebene einer C'_λ sechs ihrer Schnittpunkte mit derselben.

Die Schmiegungsebenen einer Haupttangentencurve C'_λ können mit einer beliebigen Ebene durch eine Fläche vierter Klasse verbunden werden (28.).

Strassburg i. E., den 29. Februar 1884.

Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

II. Artikel. Die orientirte Lage.

(Fortsetzung des Aufsatzes „Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie" im Band 95, S. 1.)

Hierzu Tafel III, Fig. 1—6.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

Einleitung.

Der gegenwärtige Artikel knüpft unmittelbar an die in § 3 des oben genannten I. Artikels gegebene Fundamentalconstruction der ***projectiv-trilinearen Verwandtschaft*** an, welche in folgender (für jede beliebige Lage der drei ebenen Systeme passenden) Form ausgesprochen werden kann (vgl. dazu Fig. 1):

In jedem der drei ebenen Systeme S, S', S'' sind zwei ***Kernpunkte*** p und q, p' und q', p'' und q'' *) gegeben, deren drei Verbindungslinien die ***Hauptaxen*** der betreffenden Ebenen heissen. Die sechs Kernpunkte bilden die Centren von sechs Strahlenbüscheln, von welchen jedes mit einem der zwei andern Ebenen projectivisch ist, so dass sie sich zu drei Paaren projectivischer Strahlenbüschel gruppiren, deren Centren q und p', q' und p'', q'' und p je als ***gegnerische*** Kernpunkte bezeichnet werden. Dabei sind die projectivischen Beziehungen der Art, dass für jedes Büschelpaar die den betreffenden Ebenen zugehörigen ***Hauptaxen*** als entsprechende Strahlen figuriren. — Es besteht nun für die ***Zuordnung*** der Punkte der drei Systeme die Beziehung, dass je zwei zugeordnete Punkte auf entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Kernstrahlenbüschel liegen müssen. Hat man also z. B. in den Systemen S' und S'' zwei Punkte x' und x'', welche dieser Bedingung hin-

*) Vgl. I. Art. (Bd. 95) S. 11, Anmerkung.

sichtlich der Büschel q' und p'' genügen, so findet man den dritten zugeordneten Punkt x im System S dadurch, dass man zu den nach x' und x'' gezogenen Strahlen $p'x'$ und $q''x''$ die entsprechenden Strahlen der bezüglichen gegnerischen Büschel q und p construirt und deren Schnittpunkt x markirt.

Während die Punkte ***dreifach gebunden*** sind, sind die geraden Linien nur ***zweifach gebunden***. Zwischen je zweien von drei zugeordneten Geraden findet also keine nähere Beziehung statt. Zu zwei in S' und S'' beliebig gewählten Geraden $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ findet man die dritte zugeordnete Gerade $\mathfrak{l}$ in S, indem man auf $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ irgend zwei Paare zugeordneter Punkte x', x'' und y', y'' markirt, die dritten zugeordneten Punkte x und y construirt und diese verbindet. — Auf drei zugeordneten geraden Linien bilden die zugeordneten Punkte drei projectivische Punktreihen.

Im I. Artikel wurden die drei Ebenen ausschliesslich ***in räumlich-orientirter Lage*** betrachtet, das heisst in solcher Lage, dass je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch, jedoch nicht in der nämlichen Ebene liegen, wobei die Kanten $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_{12}$ des von den drei Ebenen gebildeten Dreikants (vgl. Fig. 1) die perspectivischen Durchschnitte bilden; dieselben wurden als ***Grundschnitte*** bezeichnet. Bei solcher Lage schneiden sich die drei Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte in drei Punkten O, O_1, O_2, welchen die Bedeutung zukommt, dass für sie als Projectionscentren je drei zugeordnete Punkte x, x', x'' die Projectionen eines bestimmten Raumpunktes X repräsentiren. (Denn die drei Verbindungslinien Ox, O_1x', O_2x'' schneiden sich in einem und demselben Punkt X.)

§ 1.

Die Transformation der orientirten Lage. Allgemeine Aufgabe.

Es wurde schon am Schluss des § 3 des I. Artikels erwähnt, dass den drei ***Grundschnitten*** nicht die Bedeutung von singulären Elementen ihrer bezüglichen Ebenen zukomme.

In der That erkennt man zunächst leicht die Möglichkeit einer Aenderung der ***orientirten Lage*** vermittelst Parallelverrückung. Construirt man nämlich ein dem Dreieck OO_1O_2 ähnliches Dreieck $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$, schneidet auf dessen Seiten von den Ecken aus die Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{p} = Op$, $\mathfrak{O}\mathfrak{q} = Oq$, $\mathfrak{O}_1\mathfrak{p}' = O_1p'$ u. s. f. ab und legt nun die drei Ebenen S, S', S'' so, dass ihre

Kernpunkte in die mit gleichlautenden deutschen Buchstaben bezeichneten Punkte fallen und dass jede Ebene gegen die Ebene $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$ unter demselben Winkel geneigt ist wie vorher gegen die Ebene OO_1O_2: so erhält man eine neue orientirte Lage, für welche die neuen Grundschnitte parallel mit den entsprechenden früheren Grundschnitten sind. Das räumliche System, dessen Projectionen die drei ebenen Systeme für diese neue Lage repräsentiren, ist mit dem der alten Lage entsprechenden räumlichen System ähnlich.

Die Möglichkeit der Transformation geht jedoch noch weiter, nämlich so weit, dass die zwei räumlichen Systeme, deren Projectionen die drei ebenen Systeme für zwei bestimmte orientirte Lagen vorstellen, zu einander collinear sind.

In dem ***Scheitelpunkt A*** des von den drei Ebenen bei orientirter Lage gebildeten Dreikants fallen drei zugeordnete Punkte zusammen. Man kann nun zur Bestimmung einer orientirten Lage die Bedingung aufstellen, es solle irgend ein beliebig gewähltes Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' in den ***Scheitelpunkt*** fallen. Durch diese Bedingung ist die Aufgabe, die drei Ebenen in orientirte Lage zu bringen, in der That vollständig bestimmt. Doch liefert nicht jedes Tripel eine reelle Lösung.

Um die orientirte Lage der angegebenen Bedingung gemäss herzustellen, hat man zunächst jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei congruenten Punktreihen zu schneiden, welche durch die in den betreffenden Ebenen liegenden Punkte des gegebenen Tripels gehen, so dass diese als entsprechende Punkte der zwei Punktreihen figuriren. Man erhält alsdann die gesuchte orientirte Lage, indem man die drei Ebenen so legt, dass je zwei congruente Punktreihen zusammenfallen und in ihrer Vereinigung einen ***Grundschnitt*** constituiren.

Die Sache läuft somit auf die Aufgabe hinaus: Wenn zwei projectivische Strahlenbüschel q und p' und auf zwei entsprechenden Strahlen derselben zwei Punkte a und a' gegeben sind: durch letztere zwei gerade Linien zu ziehen, welche die zwei Strahlenbüschel nach congruenten Punktreihen schneiden.

Diese Aufgabe kann auf die manchfaltigste Weise gelöst werden; namentlich ergeben sich einfache Lösungen dadurch, dass man von einer perspectivischen Lage der zwei Strahlenbüschel ausgeht. Die im Folgenden gegebene Lösung hat den Vorzug, dass sie eine Construction liefert, die bei jeder beliebigen Lage der zwei Strahlenbüschel direct ausführbar ist,

und namentlich, dass sie ein einfaches Kriterium für die Reellität der Lösung giebt.

Da die zwei Schnittpunktreihen congruent sind, sobald die zwischen drei Strahlen des einen Büschels fallenden Strecken der einen Schnittgeraden gleich sind den zwischen die entsprechenden drei Strahlen des andern Büschels fallenden Strecken der andern Schnittgeraden, und da die Punkte a und a' auf entsprechenden Strahlen liegen, so genügt es, ausser diesen letzteren nur noch zwei Paare entsprechender Strahlen in Betracht zu ziehen. Als solche wählen wir die zwei ***rechtwinkligen*** entsprechenden Strahlenpaare. Dann reducirt sich die Aufgabe auf folgende (vgl. Fig. 2):

Gegeben zwei rechte Winkel q und p' und in der Ebene eines jeden ein Punkt a, bezw. a'. Es sollen durch a und a' zwei gerade Linien so gezogen werden, dass die zwischen a und die zwei Schenkel des Winkels q fallenden Strecken ab und ac einzeln gleich sind den zwischen a' und die zwei entsprechenden Schenkel des Winkels p' fallenden Strecken $a'b'$ und $a'c'$.

Bezeichnen wir die auf die Schenkel qb und qc als Axen bezogenen Coordinaten qr und qs des Punktes a resp. durch ϱ und σ, desgleichen die auf die entsprechenden Schenkel $p'b'$ und $p'c'$ bezogenen Coordinaten $p'r'$ und $p's'$ des Punktes a' resp. durch ϱ' und σ', und setzen wir ferner $rb = \xi$, $r'b' = \xi'$, so ergeben sich die zwei Relationen:

$$\frac{\xi}{\varrho} = \frac{ba}{ac} = \frac{b'a'}{a'c'} = \frac{\xi'}{\varrho'},$$
$$\xi^2 + \sigma^2 = ab^2 = a'b'^2 = \xi'^2 + \sigma'^2,$$

oder:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{\varrho}{\varrho'},$$
$$\xi^2 - \xi'^2 = \sigma'^2 - \sigma^2.$$

Diesen Relationen entsprechend können ξ und ξ' unter der Voraussetzung

$$\sigma' > \sigma$$

aufgefasst werden als Hypotenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem gegeben ist: das Verhältniss von Hypotenuse zu Kathete $= \frac{\varrho}{\varrho'}$ nebst der andern Kathete $= \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$. Hiernach können ξ und ξ' leicht construirt werden:

Legt man zunächst in den Winkel q von s aus die Strecke $st = \sigma'$ hinein, so ist: $qt = \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$. Legt man hierauf in den Winkel p' von r' aus die Strecke $r'u' = \varrho$ hinein, so ist Dreieck $p'r'u'$ dem gesuchten Dreieck ähnlich. Schneidet man also auf $r'a'$ die Strecke $r'v' = qt = \sqrt{\sigma'^2 - \sigma^2}$ ab und zieht durch v' eine Parallele zu $u'r'$, welche $p'r'$ in b' schneidet, so ist $r'b'v'$ das gesuchte Dreieck, also: $r'b' = \xi'$, $v'b' = \xi$. Je nachdem $r'v'$ von r' aus nach unten (s. Fig. 2) oder nach oben (s. Fig. 2a) abgeschnitten wird, fällt die Strecke $r'b'$ rechts oder links von Punkt r'. Durch Verbinden des Punkts a' mit jeder dieser zwei Lagen von b' erhält man zwei Lösungen. (Fig. 2 zeigt die eine —, Fig. 2a die andere Lösung.)

Die Construction ist immer möglich, wenn $\varrho > \varrho'$ ist. Wenigstens gilt dies unter der zu Grunde gelegten Voraussetzung $\sigma' > \sigma$. Wäre $\sigma' < \sigma$, so hätte σ als Hypotenuse —, σ' als Kathete —, und demzufolge auch ϱ' als Hypotenuse —, ϱ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefasst werden müssen, es müsste also dann $\varrho < \varrho'$ sein. Demgemäss ergiebt sich als Bedingung für die Reellität der Lösung:

$$\varrho \gtrless \varrho', \quad \text{je nachdem} \quad \sigma \lesseqgtr \sigma'.$$

Dieses Kriterium lässt sich auch in folgender Form ausdrücken:

Bringt man die zwei rechten Winkel mit ihren entsprechenden Schenkeln zur Deckung, so darf von den zwei Coordinatenrechtecken der Punkte a und a' ($arqs$ und $a'r'p's'$) keines ganz innerhalb des andern fallen, sondern es müssen sich zwei Rechtecksseiten schneiden.

Ist demnach Punkt a' in der Ebene des Winkels p' gegeben und will man in der Ebene des Winkels q das Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen Punkt a liegen muss, um mit a' eine reelle Lösung zu ermöglichen, so zieht man zu den Schenkeln qb und qc des Winkels q Parallelen in Abständen bezw. gleich den bezüglichen Coordinaten σ', ϱ' des Punktes a': dann muss Punkt a innerhalb desjenigen von den Parallelen gebildeten Scheitelwinkelraums liegen, in welchem der Punkt q nicht liegt. Wir wollen diesen Winkelraum kurz *das dem Punkte a' entsprechende günstige Gebiet* der Winkelebene q nennen.

Um nun mit Benutzung der vorstehenden *Fundamentalconstruction* drei gegebene projectiv-trilineare ebene Systeme in irgend welche orientirte Lage zu bringen, kann man etwa in folgender Weise verfahren:

Man schneidet zunächst ein Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel,

z. B. q' und p'' beliebig nach zwei congruenten Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ und construirt die den letzteren in der dritten Ebene S zugeordnete (mit ihnen projectivische) Punktreihe $\mathfrak{l}$. Man wählt hierauf unter den Punkten der congruenten Punktreihen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ ein Punktepaar a', a'' so aus, dass der ihnen entsprechende Punkt a der Punktreihe $\mathfrak{l}$ sowohl innerhalb des a' entsprechenden *günstigen Gebietes* des Büschels q als innerhalb des a'' entsprechenden *günstigen Gebietes* des Büschels p liegt, und führt die besprochene *Fundamental-Construction* einerseits für die Büschel q und p' mit den Punkten a und a', andererseits für die Büschel p und q'' mit den Punkten a und a'' aus. Schliesslich bringt man dann die drei Ebenen S, S', S'' in eine solche Lage, dass von den gewonnenen Schnittpunktreihen je zwei congruente sich decken und in dieser Deckung einen Grundschnitt constituiren.

Da die *Fundamentalconstruction* in Bezug auf jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel im allgemeinen zwei Lösungen liefert, so erhält man für ein bestimmtes Punktetripel a, a', a'' im allgemeinen zweimal drei Paare congruenter Schnittpunktreihen, welche sich hinsichtlich ihrer Verwendung als Grundschnitte einer orientirten Lage auf 8-fache Weise combiniren lassen, so dass sich im allgemeinen 8 verschiedene Möglichkeiten ergeben würden, die drei Ebenen mit einem und demselben Tripel a, a', a'' als Scheitelpunkt in räumlich-orientirte Lage zu bringen. Indessen sind selbstverständlich nur solche Combinationen brauchbar, bei welchen die drei — von je zwei Punktreihen der nämlichen Ebene eingeschlossenen Winkel (welche bei der orientirten Lage als Dreikant-Seiten figuriren) der Bedingung genügen, dass ihre Summe kleiner als 360^0 und dass keiner derselben grösser als die Summe der zwei andern ist.

§ 2.

Die Fluchtlinien. Orientirte Lage mit parallelen Grundschnitten.

Besonders einfach gestaltet sich die Herstellung der orientirten Lage für den Fall, dass das für den Scheitelpunkt vorgesehene Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' im Unendlichen liegt, so dass die drei Grundschnitte parallel werden.

Wir schicken der bezüglichen Betrachtung folgende allgemeine Bemerkung voraus:

Hat man in drei projectiv-trilinearen Systemen S, S', S'' drei beliebige gerade Linien $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$, so enthalten dieselben (falls sie nicht ein Tripel

zugeordneter Geraden bilden) stets ein und nur ein Tripel zugeordneter Punkte. Man erhält dasselbe, indem man in jeder Ebene den Schnittpunkt der betreffenden Geraden mit derjenigen Linie construirt, welche den zwei andern Geraden zugeordnet ist. Denn auf drei zugeordneten Geraden bilden die zugeordneten Punkte drei projectivische Punktreihen. Schneidet also z. B. die den Linien $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}'$ zugeordnete Gerade in der Ebene S'' die Linie $\mathfrak{t}''$ in a'', und sind a und a' die dem Punkt a'' der Punktreihe $\mathfrak{t}''$ entsprechenden Punkte der Punktreihen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}'$, so bilden a, a', a'' ein Tripel zugeordneter Punkte, und es muss dann auch die den Linien $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{t}''$ zugeordnete Gerade in S durch a — und ebenso die den Linien $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{r}$ zugeordnete Gerade in S' durch a' gehen.

Wenden wir diese allgemeine Bemerkung auf die drei unendlich fernen Geraden der drei Ebenen an, so entsprechen den Punkten der unendlich fernen Geraden zweier Ebenen als zugeordnete in der dritten Ebene im allgemeinen die Punkte einer endlichen Geraden, welche wir die ***Fluchtlinie*** der betreffenden Ebene nennen wollen, und wir gelangen somit zu folgendem Satze:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen existirt stets ein und im allgemeinen nur ein Tripel zugeordneter Punkte im Unendlichen; diese Punkte sind identisch mit den unendlich fernen Punkten der drei Fluchtlinien.

In specieller Ausführung ergeben sich die Richtungslinien der drei unendlich fernen zugeordneten Punkte u, u', u'' wie folgt: Man bestimmt zunächst die Fluchtlinie einer Ebene, z. B. S, indem man zu irgend zwei im Unendlichen liegenden Paaren zugeordneter Punkte der Ebenen S' und S'' die dritten zugeordneten Punkte in S construirt und verbindet. Zieht man dann die zu der gewonnenen Fluchtlinie parallelen Strahlen der Büschel p und q und bestimmt deren entsprechende Strahlen in den gegnerischen Büscheln q'' und p', so bilden diese die Richtungslinien für die Punkte u' und u''.

Soll nun die orientirte Lage mit dem unendlich fernen Tripel u, u', u'' als Scheitelpunkt hergestellt werden, so hat man wieder jedes Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel nach zwei congruenten Punktreihen zu schneiden, welche durch die in den betreffenden Ebenen liegenden zwei Punkte des Tripels gehen. Um dies z. B. für die zwei Büschel q und p' auszuführen, hat man dieselben nur parallel mit den Richtungslinien von u

und u' so zu schneiden, dass die zwischen irgend zwei entsprechende Strahlenpaare fallenden Strecken gleich sind. — eine Forderung, die durch unendlich viele Paare von Schnittlinien befriedigt werden kann. Führt man dies bei allen drei Paaren von gegnerischen Kernstrahlenbüscheln aus, so lässt sich dabei die Wahl der bezüglichen Schnittlinienpaare leicht so treffen, dass nachher die drei Ebenen in eine Lage gebracht werden können, in welcher die congruenten Punktreihen jedes Schnittlinienpaars coincidiren. Beispielsweise kann dies auf folgende Weise geschehen (vgl. Fig. 3):

Man wählt zunächst bei den Büscheln q und p', desgleichen bei p und q'' die Schnittlinienpaare gemäss der oben gegebenen Anweisung beliebig und legt die Systeme S' und S'' in die Ebene des Systems S so, dass die congruenten Punktreihen jedes Schnittlinienpaars sich decken. Sie mögen in dieser Deckung durch $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ bezeichnet und von den ***Hauptaxen*** in den Punkten M_1 und M_2 getroffen werden. – Es sind nun noch die Schnittlinien $\mathfrak{g}'_{12}$ und $\mathfrak{g}''_{12}$ der zwei Büschel q' und p'' zu bestimmen, und zwar so, dass wenn man die Ebenen S' und S'' um $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ dreht, die zwei congruenten Punktreihen auf $\mathfrak{g}'_{12}$ und $\mathfrak{g}''_{12}$ zur Deckung gebracht werden können. Letzteres ist der Fall, wenn irgend zwei entsprechende Punkte — z. B. die Schnittpunkte der Hauptaxen M'_{12} und M''_{12} gleiche Abstände von einer beliebigen senkrecht zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gezogenen Geraden haben. Um das dieser Bedingung genügende Schnittlinienpaar zu ermitteln, bestimmt man zunächst ein beliebiges zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ paralleles Schnittlinienpaar, welches die bezüglichen Hauptaxen in μ' und μ'' — und irgend ein Paar entsprechender Strahlen in γ' und γ'' so schneidet, dass $\mu'\gamma' = \mu''\gamma''$ ist. Zieht man dann durch q' eine Senkrechte zu $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, welche von $\gamma'\mu'$ in ν' geschnitten wird, — verlängert $\gamma''\mu''$ um $\mu''\nu'' = \mu'\nu'$, — zieht $p''\nu''$, welche die Linie $\nu'q'$ in N'' schneidet, und zieht durch N'' eine Parallele zu $\mathfrak{g}_2$, welche $p''\mu''$ in M''_{12} und $p''\gamma''$ in G''_{12} schneidet: so stellt diese die gesuchte Schnittlinie $\mathfrak{g}''_{12}$ des Büschels p'' vor. Die zugehörige Schnittlinie $\mathfrak{g}'_{12}$ des Büschels q' ergiebt sich dann, indem man durch G''_{12} eine Parallele zu $N''\nu'$ zieht, welche den Strahl $q'\gamma'$ in G'_{12} schneidet, und durch G'_{12} eine Parallele zu $\mathfrak{g}_1$ zieht, welche $q'\mu'$ in M'_{12} und $q'\nu'$ in N' schneidet.

Durch geeignete Wahl der in $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ coincirenden Schnittlinienpaare kann im allgemeinen leicht vorgesorgt werden, dass von den Strecken $M'_{12}M_1$, M_1M_2 und $M_2M''_{12}$ nicht eine grösser als die Summe der beiden andern wird.

§ 3.

Aehnliche und congruente zugeordnete Punktreihen.

Es fragt sich, ob es nicht möglich ist, dass von den drei — nach Anleitung des vorigen Paragraphen ermittelten — parallelen Grundschnitten je zwei in derselben Ebene liegende zusammenfallen, so dass bei Herstellung der räumlich-orientirten Lage die drei Grundschnitte sich in einer einzigen Geraden vereinigen und also die drei Ebenen ein Ebenenbüschel bilden. — Es würden alsdann in jedem Punkte des gemeinschaftlichen Grundschnittes drei zugeordnete Punkte zusammenfallen. Während also im allgemeinen die zugeordneten Punkte auf drei zugeordneten geraden Linien drei projectivische Punktreihen bilden, so würden in dem gemeinschaftlichen Grundschnitt drei zugeordnete Gerade vereinigt sein, denen die ausgezeichnete Eigenschaft zukommt, dass ihre zugeordneten Punkte drei congruente Punktreihen bilden.

Die zu Anfang aufgeworfene Frage ist also identisch mit der Frage, ob in drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen *congruente zugeordnete Punktreihen* existiren.

Dies ist in der That der Fall, wie sich leicht aus folgender Betrachtung ergiebt:

Sollen die zugeordneten Punkte auf drei zugeordneten Geraden zunächst drei *ähnliche* Punktreihen bilden, so müssen ihre unendlich fernen Punkte einander zugeordnet sein, das heisst: die drei Geraden müssen durch das unendlich ferne Tripel u, u', u'' gehen, oder: sie müssen den drei Fluchtlinien beziehungsweise parallel sein. Umgekehrt enthalten sämmtliche Tripel zugeordneter Geraden, welche den drei Fluchtlinien bezw. parallel sind, ähnliche zugeordnete Punktreihen.

Unter diesen unendlich vielen Tripeln ähnlicher zugeordneter Punktreihen müssten nun die Tripel *congruenter* zugeordneter Punktreihen, falls solche existiren, enthalten sein. — $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ (vgl. Fig. 3) sei ein solches congruentes Tripel. Schneiden dann $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ die entsprechenden Hauptaxen in den Punkten m, m', m'', und sind c, c', c'' irgend drei zugeordnete Punkte von $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$, so müsste

$$mc = m'c' = m''c''$$

sein. Ein Punktetripel c, c', c'' aber, das dieser Bedingung genügt, lässt sich leicht ermitteln: Man zieht parallel zu den Hauptaxen drei Linien $\mathfrak{r}$,

$\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ so, dass zwischen sie und die Hauptaxen gleiche, zu den betreffenden Fluchtlinien parallele Strecken fallen, und bestimmt (gemäss der allgemeinen Bemerkung zu Anfang des vorigen Paragraphen) das auf $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ liegende Tripel zugeordneter Punkte c, c', c''. — Zieht man demnächst durch c, c', c'' zu den entsprechenden Fluchtlinien Parallelen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$, welche die betreffenden Hauptaxen in m, m', m'' schneiden: so genügen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ der aufgestellten Forderung. (Denn sie bilden als Verbindungslinien der zwei Tripel zugeordneter Punkte c, c', c'' und u, u', u'' die Träger dreier zugeordneten Punktreihen, welche congruent sind, weil $mc = m'c' = m''c''$ und $cu = c'u' = c''u''$ ist.)

Die angegebene Construction liefert **vier Lösungen**. Es können nämlich zu jeder Hauptaxe in einem bestimmten — in der Richtung der Fluchtlinien gemessenen — Abstande **zwei** Parallelen gezogen werden, welche zu beiden Seiten der Hauptaxe liegen und durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_{0}$, $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}'_{0}$, $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{t}''_{0}$ bezeichnet werden mögen. Diese 2 mal 3 Linien lassen sich auf 8-fache Weise combiniren. Führt man mit jeder Combination die angegebene Construction aus, so liefern je zwei sich ergänzende Combinationen ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''$ und $\mathfrak{r}_{0}$, $\mathfrak{s}'_{0}$, $\mathfrak{t}''_{0}$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}''_{0}$ und $\mathfrak{r}_{0}$, $\mathfrak{s}'_{0}$, $\mathfrak{t}''$, u. s. f.) das nämliche Resultat. Man erhält somit im ganzen vier verschiedene Lösungen.

Man bemerke, dass die besprochene Construction **immer möglich** ist, dass es aber ausser den auf diesem Wege gefundenen keine weiteren Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen geben kann, da ein congruentes Tripel nothwendig das unendlich ferne Punktetripel u, u', u'' enthalten muss. Nur in dem besonderen Falle, wo die unendlich fernen Geraden der drei Ebenen einander selbst zugeordnet sind, existiren unendlich viele Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen.

Wir können demgemäss den Satz aussprechen:

In drei projectiv-trilinearen ebenen Systemen existiren jederzeit vier und im allgemeinen nur vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen; ihre Träger sind parallel den drei Fluchtlinien.

§ 4.

Orientirte Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten.

Kehren wir zu der Aufgabe der Herstellung einer **orientirten Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten** zurück: so hat man, um eine solche zu bewirken, die drei Ebenen so zu legen, dass eines der

gefundenen Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen c, c′, c″ zur Deckung gelangt — es mag in dieser Deckung durch 𝕮 bezeichnet werden, — und ferner: dass die drei Hauptaxen pq, $p'q'$, $p''q''$ in eine Ebene zu liegen kommen. (Denn die Verbindungslinien je zweier gegnerischen Kernpunkte müssen sich schneiden.)

Um letzteres zu bewirken, kann man sich jede Ebene um den gemeinschaftlichen Grundschnitt 𝕮 gedreht denken, wobei jede Hauptaxe einen Rotationskegel beschreibt, dessen Spitze in dem Vereinigungspunkt M des Punktetripels m, m', m'' liegt und dessen Axe 𝕮 ist. Schneidet man diese Kegel durch eine beliebige — durch M gehende — Ebene und wählt von jedem Kegel eine Schnittmantellinie als Lage der betreffenden Hauptaxe: so ist dadurch die orientirte Lage bestimmt, welche durch Fig. 4 des näheren illustrirt werden mag.

Legt man die Schnittebene durch die Linie 𝕮 selbst, so erhält man die drei Systeme orientirt in einer und derselben Ebene. Es fallen dann auch die Projectionscentren (Schnittpunkte der Verbindungslinien der gegnerischen Kernpunktepaare) in diese Ebene. Die von ihnen nach je drei zugeordneten Punkten x, x', x'' gezogenen Strahlen schneiden sich auch dann noch in einem und demselben Punkt X; das Punktsystem, als dessen Projectionen sich nun die drei trilinearen Systeme darstellen, ist ein ebenes*). Zur näheren Erläuterung bemerke man, dass Fig. 4 ebensowohl als Abbildung des räumlichen Gebildes, in welchem der gemeinschaftliche Grundschnitt 𝕮 nicht in der Ebene OO_1O_2 liegt, — wie als ebenes Gebilde aufgefasst werden kann.

Hat man eine solche ebene orientirte Lage und dreht eines der drei Systeme um den gemeinschaftlichen Grundschnitt um einen Winkel von 180°, so erhält man eine neue ebene orientirte Lage vom nämlichen Charakter**). Wendet man dies auf jedes einzelne der drei Systeme an, so erhält man zusammen mit der ursprünglichen Lage vier verschiedene orientirte Lagen. (Würde man zwei Ebenen, z. B. S und S' drehen, so würde man dieselbe Lage erhalten wie durch Drehung der einzigen dritten S''.) Es giebt folglich vier verschiedene ebene orientirte Lagen mit einem und dem-

*) Man achte wohl auf den wesentlichen Unterschied dieser *(trilinearen)* Art der ebenen Projection im Gegensatz zur *collinearen* ebenen Projection.

**) Man bemerke, dass die neue Lage der gedrehten Hauptaxe identisch ist mit der zweiten Schnittmantellinie des betreffenden Rotationskegels.

selben gemeinschaftlichen Grundschnitt. Da aber jedes der vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen als gemeinschaftlicher Grundschnitt verwendet werden kann, so gilt der Satz:

Drei projectiv-trilineare ebene Systeme können im allgemeinen auf 16 verschiedene Arten in orientirte Lage in einer und derselben Ebene mit gemeinschaftlichem Grundschnitt gebracht werden. Von diesen 16 Lagen haben je vier den nämlichen Grundschnitt.

Man bemerke, dass die Herstellung einer räumlich-orientirten Lage mit gemeinschaftlichem Grundschnitt auf die oben angegebene Weise stets möglich ist. Nur in einem besonderen Falle bieten sich (und zwar sowohl bei der orientirten Lage mit zusammenfallenden — als auch mit parallelen Grundschnitten) gewisse Eigenthümlichkeiten dar, nämlich in dem Falle, wo in zwei Ebenen, z. B. S und S' die Hauptaxen mit den Fluchtlinien und also auch mit den Linien $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ rechte Winkel bilden. Von den oben betrachteten drei Rotationskegeln gehen dann zwei in — zur Axe $\mathfrak{C}$ senkrechte Ebenen über, welche zusammenfallen und also von der durch M gelegten Schnittebene nach einer und derselben Geraden geschnitten werden. Demgemäss ist die orientirte Lage hier nur in der Art möglich, dass die Hauptaxen der Ebenen S und S', und somit auch die Ebenen S und S' selbst, zusammenfallen, während die dritte Ebene S'' jede beliebige Stellung einnehmen kann. Fig. 5 mag als Illustration dieses Falles dienen. Die zwei Projectionscentren O und O_1 fallen unter solchen Umständen mit den Kernpunkten p und q' zusammen, und das Punktsystem, dessen Projectionen die drei Systeme in dieser Lage vorstellen, ist ein ebenes.

Damit ist indessen nicht gesagt, dass drei derartige Systeme nicht auf andere Weise in solche orientirte Lage gebracht werden können, in welcher sie sich als Projectionen eines räumlichen Punktsystems darstellen. Z. B. kann man in dieser Beziehung folgende Erwägung anstellen:

Ist c, c', c'' irgend ein den drei congruenten Punktreihen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ zugehöriges Punktetripel, so gehen z. B. durch c' und c'' die zwei congruenten Schnittpunktreihen $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ der zwei gegnerischen Kernstrahlenbüschel q' und p''; das in § 1 gegebene Kriterium für die reelle Lösung der *Fundamentalaufgabe* ist somit bezüglich der Punkte c' und c'' erfüllt, und es muss folglich ausser dem Schnittlinienpaar $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ noch ein zweites reelles Schnittlinienpaar $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ existiren, das nach den bezüglichen Ausfüh-

rungen des § 1 leicht gefunden werden kann. Ebenso ergiebt sich für die zwei Büschel q'' und p noch eine zweite Lösung $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}$, während bei den Büscheln q und p' die zwei Lösungen zusammenfallen. Es kann somit durch Zusammenlegen von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{e}''$ und $\mathfrak{e}$ eine räumlich-orientirte Lage hergestellt werden, wofern die von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{e}''$ eingeschlossenen Winkel zusammen kleiner als 360^0 sind und keiner derselben grösser als die Summe der beiden andern ist.

Man erkennt bei näherer Ausführung der bezüglichen Construction leicht, dass hiebei die verschiedenen Linienpaare $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}$, welche den verschiedenen zugeordneten Punktetripeln der Punktreihen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ zugehören, sämmtlich bezw. unter sich parallel sind, und zwar dies für alle vier Tripel congruenter zugeordneter Punktreihen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$.

§ 5.

Schlussfolgerungen.

Wir sind bei unsern seitherigen Betrachtungen ausgegangen von der Definition der ***projectiv-trilinearen Verwandtschaft*** als der Beziehung zwischen drei solchen ebenen Systemen, welche drei verschiedene Projectionen eines und desselben räumlichen Originalsystems vorstellen. Es war hiebei nicht von vornherein ausgemacht, ob zwischen den projectiven Beziehungen der drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel nicht eine gewisse beziehliche oder beschränkende Bedingung bestehe. Nun ergiebt sich aber, dass die im vorigen Paragraphen besprochenen Constructionen zur Herstellung der ***orientirten Lage mit zusammenfallenden Grundschnitten*** immer ausgeführt werden können, wie auch jene projectiven Beziehungen beschaffen sein mögen *), — dass folglich die letzteren von einander vollkommen unabhängig sind. Die projectiv-trilineare Verwandtschaft ist somit durch die drei Paare von Kernpunkten und die drei projectiven Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln, welche willkürlich gewählt werden können, vollständig bestimmt, und es kann demgemäss

*) Es ist wohl zu beachten, dass bezüglich der allgemeinen Aufgabe der Orientirung noch nicht bewiesen ist, dass es jederzeit ein Punktetripel a, a', a'' giebt, für welches die in § 1 besprochene Construction zur Herstellung der orientirten Lage mit a, a', a'' als Scheitelpunkt — möglich ist. Wohl aber ist die im vorigen Paragraphen besprochene Construction zur Orientirung mit zusammenfallenden Grundschnitten immer möglich.

diese Bestimmung als Definition der trilinearen Verwandtschaft an die Spitze gestellt werden, in der Weise, wie es schon in der *Einleitung* (Al. 2) vorgreifend geschehen ist. Wir haben dann den Satz, dass drei gemäss dieser Definition einander zugeordnete ebene Punktsysteme in gestaltlicher Hinsicht stets als Projectionen eines und desselben — im allgemeinen räumlichen — Original-Punktsystems aufgefasst werden können.

Erinnern wir uns ferner, dass die projective Beziehung zwischen zwei Strahlenbüscheln durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt ist, welche willkürlich gewählt werden können, und nehmen wir bei unsern drei gegnerischen Büschelpaaren als solche entsprechende Strahlen ausser den *Hauptaxen* noch die Kernstrahlen, die nach irgend zwei Tripeln zugeordneter Punkte führen, so ergiebt sich der Satz:

Drei projectiv-trilineare ebene Systeme sind bestimmt durch die sechs Kernpunkte und zwei Tripel zugeordneter Punkte, welche willkürlich gewählt werden können, mit der Beschränkung, dass von den in einer Ebene liegenden zwei Tripelpunkten und zwei Kernpunkten keine drei Punkte in gerader Linie liegen dürfen *).

§ 6.

Ebene Orientirung im weiteren Sinn.

Knüpft man den Begriff der *orientirten Lage* an die blosse Bedingung der perspectivischen Lage der gegnerischen Kernstrahlenbüschel, so ist auch eine solche Lage als orientirt zu bezeichnen, wo in einer und der-

*) Im I. Artikel wurde die Methode der *photogrammetrischen Aufnahme* mit Benützung einer für photogrammetrische Zwecke besonders eingerichteten Camera besprochen. Steht nun nur eine gewöhnliche photographische Camera zur Verfügung, so kann zufolge des obigen Satzes der Grundriss (bezw. Aufriss) aus zwei photographischen Bildern ermittelt werden, sobald jede Aufnahme die Abbildung des gegnerischen Standpunktes enthält, und ferner die Grundriss- (bezw. Aufriss-) Projectionen der zwei Standpunkte sowie zweier aufgenommenen Punkte bekannt sind. Man wird also, um z. B. den Grundriss zu finden, in jedem Standpunkt mittelst eines Winkelmessinstrumentes die horizontalen Winkel messen, welche die nach zwei bestimmten Punkten gehenden Visirlinien mit der *Standlinie* machen, alsdann die *Standlinie* in irgend welchem Massstabe auf's Papier auftragen und durch Anlegen der gemessenen Winkel die Grundriss-Projectionen der zwei Punkte fixiren. Dadurch sind von den zwei Paaren gegnerischer Kernstrahlenbüschel p und q'', q und p' je drei Paare entsprechender Strahlen bekannt; also kann zu einem beliebigen vierten Strahl des Büschels q'' oder p' der entsprechende Strahl von p oder q leicht (am bequemsten durch Vermittelung einer perspectivischen Lage) gefunden werden.

selben Ebene je zwei gegnerische Kernstrahlenbüschel perspectivisch sind, ohne dass die perspectivischen Durchschnitte *(Grundschnitte)* durch den nämlichen Punkt gehen (vgl. Fig. 6). Als Projectionen eines und desselben Originalsystems stellen sich aber die drei Systeme in solcher Lage nicht dar. Denn zieht man nach drei zugeordneten Punkten x, x', x'' Strahlen von den entsprechenden Schnittpunkten der Verbindungslinien der gegnerischen Kernpunkte, so schneiden diese sich nicht in dem nämlichen Punkt. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn sich auch die Grundschnitte in einem und demselben Punkte schneiden.

Eine solche ***orientirte Lage im weiteren Sinn*** lässt sich leicht auf folgende Weise herstellen:

Man legt zunächst die Systeme S' und S'' so in die Ebene des Systems S, dass einerseits das Kernstrahlenbüschel p' mit seinem gegnerischen Büschel q, andererseits das Kernstrahlenbüschel q'' mit seinem gegnerischen Büschel p perspectivisch ist. Und zwar können diese zwei perspectivischen Lagen immer so gewählt werden, dass das dritte Paar gegnerischer Kernstrahlenbüschel q' und p'' zwei parallele entsprechende Strahlenpaare besitzt. Dieselben lassen sich leicht bestimmen als Doppelstrahlen des Büschels q' mit dem durch Parallelverschiebung nach q' verlegten Büschel p''. Verschiebt man dann das System S'' entlang des gemeinschaftlichen Strahls pq'' so lange, bis eines jener parallelen entsprechenden Strahlenpaare zur Coincidenz gelangt, so ist damit auch zwischen den Büscheln q' und p'' die perspectivische Lage hergestellt, ohne dass durch die Verschiebung die perspectivische Lage von p und q'' verloren gegangen wäre.

Als von besonderem Interesse und besonderer Einfachheit der Herstellung ist speciell derjenige Fall der ***ebenen Orientirung im weiteren Sinn*** hervorzuheben, wo die drei Systeme so gelegt werden, dass die drei Hauptaxen (und also sämmtliche Kernpunkte) in eine und dieselbe gerade Linie fallen. —

Wenn hiemit gezeigt ist, wie drei vorhandene projectiv-trilineare Systeme stets in die genannte Lage gebracht werden können, so folgt aus den Erörterungen des vorigen Paragraphen umgekehrt, dass, wenn man in einer Ebene irgend drei beliebige Linien als Grundschnitte — und irgend drei Punktepaare, deren Verbindungslinien sich auf den Grundschnitten schneiden oder in gerader Linie liegen, als Kernpunkte wählt, dadurch stets drei projectiv-trilineare Systeme bestimmt sind, das heisst: drei solche

Systeme, welche in gestaltlicher Hinsicht als Projectionen eines und desselben Original-Punktsystems betrachtet werden können.

Ein Blick auf die Fig. 6 zeigt, dass dies auch in folgender Form ausgesprochen werden kann:

Bewegt sich ein veränderliches Sechseck so, dass drei nicht aufeinanderfolgende Ecken auf drei festen Leitgeraden laufen, während die sechs Seiten sich um sechs feste Punkte drehen, und liegen diese sechs Punkte so, dass die Verbindungslinien je zweier solcher, um welche sich die einer freien Ecke anliegenden Seiten drehen, sich auf den Leitgeraden schneiden, oder dass sie in gerade Linie fallen: so stehen die drei ebenen Systeme, welche unter diesen Umständen von den noch freien Ecken beschrieben werden können, in projectiv-trilinearer Verwandtschaft.

Es ist damit die *projectiv-trilineare Verwandtschaft* in Beziehung gebracht zu dem *MacLaurin-Braikenridge*'schen Theorem, bezw., falls die sechs Drehpunkte in gerader Linie liegen, zu dem Theorem des ***Pappus.*** Wir werden auf diesen Gegenstand im III. Artikel zurückkommen.

Berlin, Juni 1884.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art.

(Von Herrn *Milinowski* in Weissenburg i. E.)

I. Der Zweck der folgenden Zeilen ist, mit den Mitteln der Geometrie der Lage aus den Eigenschaften der Raumcurven vierter Ordnung erster Art diejenigen der ebenen Curven dritter Ordnung und vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten abzuleiten. Durch räumliche Betrachtungen entwickelt Herr *Reye* in seiner „Geometrie der Lage" einige Haupteigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung, gelangt aber auf seinem Wege nicht zu den Polareigenschaften derselben und lässt die Curven vierter Ordnung eigentlich unberücksichtigt. Vorausgesetzt wird im Folgenden die synthetische Geometrie in dem Umfange des genannten *Reye*schen Werkes oder desjenigen von Herrn *Schroeter:* „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung." Verweisungen auf diese Werke werden durch *R.* oder *S.* gekennzeichnet.

II. Eine Raumcurve $R^{(4)}$ vierter Ordnung erster Art ist die Grundcurve eines Büschels von Flächen $\varphi^{(2)}$ ... zweiter Ordnung. Dieselbe soll auf eine Ebene η projicirt werden. (Die Elemente der Originalfigur sollen fortan mit lateinischen Lettern, diejenigen der Projection mit den gleichnamigen deutschen Lettern bezeichnet werden.)

Die Projection der Raumcurve $R^{(4)}$ aus einem beliebigen Punkte P ist eine ebene Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$; diese sind die Schnittpunkte der Ebene η mit den durch P gehenden Regelstrahlen r_1 und r_2 auf derjenigen Fläche $\varphi_p^{(2)}$ des Büschels, welche durch P geht.

Die Projection von $R^{(4)}$ aus einem auf ihr liegenden Punkte P ist eine ebene Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung.

III. *Zunächst soll angenommen werden, dass das Projectionscentrum P auf der Raumcurve liegt.*

Auf einer beliebigen Fläche $\varphi_p^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ seien r_1 und r_2 die beiden durch P gehenden Regelstrahlen, die sich schneiden und daher zu verschiedenen Regelschaaren dieser Fläche gehören. Irgend ein Regelstrahl g_1 derselben, welcher mit r_1 zu derselben Regelschaar gehört, hat mit r_1 keinen Punkt gemein, trifft aber r_2; er schneide $R^{(4)}$ in den Punkten P_4 und P_5.

Auf $R^{(4)}$ seien $PP_1P_2P_3$ vier *feste* Punkte; diese repräsentiren mit P_4P_5 und r_1 acht Punkte, durch welche sich ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung $\varrho^{(2)}\dots$ legen lässt. Letztere schneiden $\varphi_p^{(2)}$ in einem Büschel von Raumcurven dritter Ordnung, von denen eine durch P geht. Sie sei $R^{(3)}$, geht durch $PP_1\dots P_5$, hat r_1 zur Secante, wird aber von r_2 ausser in P nicht mehr getroffen. — Die Projection von $R^{(3)}$ ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{R}^{(2)}$, welcher durch die Projectionen $\mathfrak{P}_1\dots\mathfrak{P}_5$ und durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}_1$ von r_1 mit der Projectionsebene η geht; die Projection $\mathfrak{g}_1$ des Regelstrahls g_1 geht durch $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{R}_2$ von r_2 mit η. Es geht also

$\mathfrak{R}^{(2)}$ durch die Punkte $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5\mathfrak{R}_1$,
$\mathfrak{g}_1$ " " " $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5\mathfrak{R}_2$.

Wenn nun g_1 seine Regelschaar auf $\varphi_p^{(2)}$ durchläuft, so beschreibt $\mathfrak{R}^{(2)}$ das Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{R}_1)$ und $\mathfrak{g}_1$ das Strahlenbüschel $(\mathfrak{R}_2)$; die Elemente dieser beiden Büschel schneiden sich paarweise in je zwei Punkten $\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5$ auf $\mathfrak{R}^{(3)}$ und sind dadurch projectivisch auf einander bezogen:

1. *Die ebene Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden. Von den Grundpunkten können entweder die vier des Kegelschnittbüschels oder drei desselben und derjenige des Strahlenbüschels beliebig auf der Curve gewählt werden.*

Der letzte Theil des Satzes folgt daraus, dass von den Regelstrahlen r_1 und r_2 der eine durch den anderen bestimmt ist. Denn nimmt man r_1 als Secante von $R^{(4)}$ durch P, so ist durch r_1 und $R^{(4)}$ die Fläche $\varphi_p^{(2)}$ und auf dieser r_2 bestimmt.

Wenn g_1 seine Regelschaar auf $\varphi_p^{(2)}$ durchläuft, beschreibt $R^{(3)}$ auf $\varphi_p^{(2)}$ ein Raumcurvenbüschel dritter Ordnung mit den Grundpunkten $PP_1P_2P_3$; die Regelschaar und dieses Büschel sind projectivisch auf einander bezogen, wenn man jedem Regelstrahle g_1 die durch ihn hervorgerufene Raumcurve $R^{(3)}$ zuordnet. Dadurch hat man den Satz:

2. *Jede Raumcurve $R^{(4)}$ vierter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch ein Büschel von Raumcurven dritter Ordnung und eine projectivische Regelschaar erzeugt werden.*

Der vorletzte Satz, der als unmittelbare Folge des letzten aufgefasst werden kann, lässt sich auch auf die folgende Art beweisen.

Auf $R^{(4)}$ nehme man zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 an; alle Secanten von $R^{(4)}$, welche der Geraden P_1P_2 begegnen, bilden die Regelschaar eines Hyperboloids $\varrho^{(2)}$. Ist XY eine solche Secante, so liegt sie mit P_1P_2 in einer Ebene ε; diese schneidet die Fläche $\varphi_p^{(2)}$, auf welcher r_1r_2 liegen, in einem Kegelschnitte $K^{(2)}$, welcher jedem der Strahlen r_1r_2 begegnet. Der Kegelschnitt $K^{(2)}$ und der Punkt P bestimmen einen Kegel $\varkappa^{(2)}$, die Secante XY und der Punkt P eine Ebene $\varkappa$. Wenn XY das Hyperboloid $\varrho^{(2)}$ durchläuft, so durchläuft $\varkappa^{(2)}$ ein Büschel von Kegeln mit den Grundstrahlen r_1, r_2, PP_1, PP_2 und die Ebene $\varkappa$ durchläuft ein Ebenenbüschel, dessen Axe a der durch P gehende Regelstrahl der Fläche $\varrho^{(2)}$ ist, welcher alle Secanten XY schneidet. Ordnet man jeder Secante XY den durch sie entstandenen Kegel $\varkappa^{(2)}$ und diesem die Ebene $[a, XY]$ zu, so ist die Regelschaar (XY) projectivisch auf das Kegelbüschel $(\varkappa^{(2)})$ und das Ebenenbüschel (a) bezogen. Da $R^{(4)}$ aus P durch eine Kegelfläche $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung projicirt wird, so folgt:

3. *Die Raumcurve $R^{(4)}$ kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelbüschel und eine projectivische Regelschaar erzeugt werden.* Der Scheitel des Kegelbüschels kann ein beliebiger Punkt P von $R^{(4)}$ sein, und drei seiner Grundstrahlen kann man beliebig wählen. Denn wählt man r_1, PP_1, PP_2, so ist dadurch die durch P gehende Fläche $\varphi_p^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}$ und also der Regelstrahl r_2 auf ihr bestimmt. Mit diesen Grundkanten ist aber auch die Regelschaar (XY) gegeben. — Ferner folgt:

4. *Der Kegel $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch ein Kegelbüschel und ein projectivisches Ebenenbüschel erzeugt werden.*

Projicirt man die erste Figur auf die Ebene η oder schneidet die zweite mit dieser Ebene, so erhält man wieder den Satz von der ebenen Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung.

5. Auf bekannte Art folgert man, dass eine ebene Curve dritter Ordnung durch neun Punkte bestimmt ist. Hieran knüpft sich die Aufgabe:

Eine Raumcurve vierter Ordnung zu construiren, deren Projection eine gegebene ebene Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung ist.

Auf $\mathfrak{R}^{(3)}$ seien $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_9$ neun beliebige Punkte; man verbinde sie mit einem Punkte P, der nicht in ihrer Ebene liegt, durch die Geraden $p_1 \dots p_9$. Auf den Strahlen $p_1 \dots p_6$ nehme man die Punkte $P_1 \dots P_6$ und lege durch sie zwei Hyperboloide $\gamma_1^{(2)}$ und $\gamma_2^{(2)}$, die p_7 und p_8 je zu einem Regelstrahle haben. Man halte nun die Punkte $P_1 \dots P_5$ fest und lasse P_6 den Strahl p_6 durchlaufen, so beschreiben $\gamma_1^{(2)}$ und $\gamma_2^{(2)}$ zwei projectivische Flächenbüschel. Diese schneiden p_9 in zwei projectivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte P_9 und P_9' sein mögen. Die beiden Flächen, welche durch einen dieser Punkte, z. B. P_9 gehen, schneiden sich in einer Raumcurve $R^{(4)}$, welche durch die Punkte $P_1 \dots P_5 P_9$ geht und den drei Strahlen $p_6 p_7 p_8$ begegnen muss. Sie muss auch durch P gehen, weil die Hyperboloide den Punkt P gemeinschaftlich haben.

Die Projection von $R^{(4)}$ hat mit $\mathfrak{R}^{(3)}$ die neun Punkte $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_9$ gemeinsam und fällt also mit ihr zusammen.

Es folgt noch:

6. *Wenn zwei Raumcurven vierter Ordnung einen Punkt P gemeinschaftlich haben und neun Strahlen dieses Punktes begegnen, so liegen sie perspectivisch.*

IV. *Polareigenschaften von $\mathfrak{R}^{(3)}$.*

1. Durch den Punkt P ziehe man an $R^{(4)}$ die Tangente t und eine beliebige Gerade a. Ist Q irgend ein anderer Punkt von a, so bilden die Polarebenen der Punkte P und Q in Bezug auf die Flächen des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$ zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Axen die conjugirten Strahlen von P und Q sind. Der conjugirte Strahl von P ist t; die beiden Ebenenbüschel erzeugen ein Hyperboloid $\alpha^{(2)}$, das Polarhyperboloid von a, welches also durch t geht und in P die Ebene $|at|$ berührt. Es berührt also auch die Raumcurve $R^{(4)}$ in P und schneidet dieselbe noch in sechs Punkten $A_1 \dots A_6$, deren Verbindungsebenen mit a diejenigen sechs Ebenen durch a sind, welche die Raumcurve berühren.

Projicirt man dieselben aus P in die Punkte $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_6$ und ist $\mathfrak{A}$ der Schnittpunkt (a, η), so sind die sechs Geraden $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_6)$ Tangenten von $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{R}^{(3)}$.

Von einem Punkte $\mathfrak{A}$ lassen sich an $\mathfrak{R}^{(3)}$ sechs Tangenten ziehen.

2. Im Büschel $\varphi^{(2)} \dots$ giebt es eine Fläche $\varphi^{(2)}$, welche die Ebene $|at|$ und daher auch die Polarfläche $\alpha^{(2)}$ von a in P berührt. Beide Flächen schneiden sich in einer Raumcurve $A^{(4)}$, welche in P einen Doppelpunkt

besitzt. Die Strahlen, welche P mit den Punkten dieser Raumcurve verbinden, erfüllen einen Kegel $\varkappa^{(2)}$ zweiter Ordnung, welcher dem Büschel $(\varphi^{(2)}\alpha^{(2)})$ angehört und durch die Punkte $A_1 \dots A_6$ sowohl wie $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_6$ hindurch geht. Letztere liegen daher auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{R}^{(2)}$.

Man nennt $\varkappa^{(2)}$ die erste Polarfläche der Geraden a in Bezug auf den Kegel dritter Ordnung $\varkappa^{(3)} = (P, R^{(4)})$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ die erste Polare des Punktes $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(3)}$. — Also:

Die Berührungspunkte der sechs Tangenten, die sich von einem Punkte $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{R}^{(3)}$ ziehen lassen, liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, der ersten Polare von $\mathfrak{A}$.

3. Die Gerade a, welche beliebig angenommen war, mag $R^{(4)}$ noch in Q schneiden; in diesem Punkte sei t_1 die Tangente an $R^{(4)}$. Es bilden die Polarebenen von P und Q bezüglich der Flächen des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$ zwei projectivische Ebenenbüschel mit den Axen t und t_1; das Polarhyperboloid $\alpha^{(2)}$ von a berührt also die Ebenen $|at|$ und $|at_1|$ in P und Q. Die Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$, welche PQ als Regelstrahl hat, berührt in P und Q dieselben Ebenen $|at|$ und $|at_1|$, also schneiden sich die Flächen $\alpha^{(2)}$ und $\varphi^{(2)}$ in der Geraden $a = PQ$ und in einer Raumcurve $R^{(3)}$ dritter Ordnung, welche durch die beiden Punkte P und Q hindurchgeht und in P und Q die Tangenten t und t_1 hat. Sie wird aus P durch einen Kegel $\varkappa^{(2)}$ projicirt, welcher in Q auch die Gerade t_1 berührt und daher $|at_1|$ zur Berührungsebene hat. Er berührt also den Kegel $\varkappa^{(3)}$ längs a und schneidet $R^{(4)}$ noch in denjenigen vier Punkten, deren Verbindungsebenen mit a Berührungsebenen von $R^{(4)}$ sind. Wenn man projicirt, so erhält man:

Die erste Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{R}^{(3)}$ berührt in $\mathfrak{A}$ diese Curve und schneidet sie noch in vier Punkten, deren Verbindungslinien mit $\mathfrak{A}$ Tangenten von $\mathfrak{R}^{(3)}$ sind.

4. Durch a sei ε eine beliebige Ebene; in ihr drehe sich a um P. Zu jeder Lage von a gehört ein Polarhyperboloid $\alpha^{(2)}$; alle diese Polarhyperboloide $\alpha^{(2)} \dots$ bilden ein Büschel, dessen Grundcurve aus der Tangente t und einer Raumcurve $E^{(3)}$ dritter Ordnung besteht, dem Orte der Pole von ε in Bezug auf die Flächen des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$ (*R.* Seite 157, *S.* Seite 697).

Die beiden Flächenbüschel $\varphi^{(2)} \dots$ und $\alpha^{(2)} \dots$ bestimmen ein Gebüsch. Ordnet man je zwei Flächen dieser Büschel, $\varphi^{(2)}$ und $\alpha^{(2)}$, die sich in P berühren, einander zu, so sind die Büschel projectivisch auf einander

bezogen. Je zwei entsprechende Flächen schneiden sich in einer Raumcurve $A^{(4)}$ vierter Ordnung, die in P einen Doppelpunkt hat; sie wird aus P durch einen Kegel $\varkappa^{(2)}$ projicirt, der auch zum Gebüsche gehört. Zwei solche Kegel schneiden sich in vier Geraden $g_1 \dots g_4$, welche eine Raumcurve des Gebüsches bilden. Irgend zwei Raumcurven des Gebüsches, die sich in acht associirten Punkten schneiden, können durch eine Fläche des Gebüsches verbunden werden (*R.* Seite 236). Da aber die Raumcurve $(g_1 g_2 g_3 g_4)$ von jeder Raumcurve $A^{(4)}$ in P in acht associirten Punkten geschnitten wird, so muss jeder durch eine Raumcurve $A^{(4)}$ und den Punkt P gelegte Kegel $\varkappa^{(2)}$ durch die vier Geraden $g_1 \dots g_4$ gehen. Alle diese Kegel bilden also ein Büschel, und da sie die ersten Polarflächen der Geraden $a \dots$ in Bezug auf den Kegel $\varkappa^{(3)}$ sind, so folgt:

Die ersten Polarflächen aller Geraden einer Ebene in Bezug auf einen Kegel $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung, welche durch den Scheitel dieses Kegels gehen, bilden ein Kegelbüschel zweiter Ordnung.

Durch Projection ergiebt sich hieraus:

Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf eine ebene Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ dritter Ordnung bilden ein Kegelschnittbüschel.

Auch auf folgende Art, ohne die Eigenschaften des Gebüsches zu benutzen, leitet man die letzten Sätze ab.

Das Polarhyperboloid $\alpha^{(2)}$ schneidet eine feste, sonst ganz beliebige Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$ in einer Raumcurve $F^{(4)}$ vierter Ordnung, welche t in P berührt und durch diejenigen sechs Punkte $A_1 \dots A_6$ auf $R^{(4)}$ geht, deren Verbindungsebenen mit a die Berührungsebenen durch a an $R^{(4)}$ sind. Durch die acht associirten Punkte $PPA_1 \dots A_6$ lässt sich auf $\varphi^{(2)}$ ein Büschel von Raumcurven vierter Ordnung legen; eine von ihnen $A^{(4)}$ hat in P einen Doppelpunkt; ihre Projection $\mathfrak{A}^{(2)}$ ist die erste Polare von $\mathfrak{A} = (a, \eta)$.

Man findet diese Curve $A^{(4)}$, wenn man durch die sechs Punkte $A_1 \dots A_6$ eine Fläche $\psi^{(2)}$ legt, welche $\varphi^{(2)}$ in P berührt, also durch die unendlich benachbarten Punkte PP auf t und einen dritten ihnen unendlich nahe liegenden Punkt Q geht.

Wenn sich a in ε um P dreht, so ändert sich die Fläche $\psi^{(2)}$, gehört aber stets dem Flächenbündel an, welches durch die feste Fläche $\varphi^{(2)}$ und das Polarflächenbüschel $\alpha^{(2)} \dots$ bestimmt ist; da alle Flächen $\psi^{(2)}$ ausserdem durch Q gehen, so bilden sie ein Büschel (*R.* Seite 231, *S.* Seite 702).

Diese Flächen $\psi^{(2)}$ schneiden daher auch $\varphi^{(2)}$ in einem Raumcurvenbüschel, dessen Projection ein Kegelschnittbüschel ist, welches die ersten Polaren der Punkte $\mathfrak{A}\cdots = (a, \ldots \eta)$ enthält.

Einen dritten Beweis, der auch die Eigenschaften des Bündels nicht benutzt, findet man in 8.

5. Jede Polarfläche $\alpha^{(2)}$ wird von einer Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}\ldots$ in P berührt; beide schneiden sich in einer Raumcurve $A^{(4)}$, die in P einen Doppelpunkt hat und aus P durch den Kegel $\varkappa^{(2)}$, der zum Büschel $(\alpha^{(2)}\varphi^{(2)})$ gehört, projicirt wird. Es seien nun $(\alpha_1^{(2)}\varphi_1^{(2)})$ und $(\alpha_2^{(2)}\varphi_2^{(2)})$ zwei andere Büschel, bestimmt durch zwei Polarflächen $\alpha_1^{(2)}$ und $\alpha_2^{(2)}$ und die sie berührenden Flächen $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}\ldots$ Im Büschel $(\alpha^{(2)}\varphi^{(2)})$ sei $\beta^{(2)}$ eine beliebige Fläche; ordnet man nun die Flächen $\alpha^{(2)}\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}$, $\varphi^{(2)}\varphi_1^{(2)}\varphi_2^{(2)}$, $\varkappa^{(2)}\varkappa_1^{(2)}\varkappa_2^{(2)}$ einander zu, so sind die Büschel $(\alpha^{(2)}\varphi^{(2)})$, $(\alpha_1^{(2)}\varphi_1^{(2)})$, $(\alpha_2^{(2)}\varphi_2^{(2)})$ projectivisch auf einander bezogen. Die Flächen der beiden letzten, welche der Fläche $\beta^{(2)}$ des ersten Büschels entsprechen, seien $\beta_1^{(2)}$ und $\beta_2^{(2)}$; sie bilden mit $\beta^{(2)}$ ein neues Büschel, wie sich auch aus den Eigenschaften des Gebüsches ergiebt (*R.* Seite 244). Daraus folgt, dass die homologen Flächen der unendlich vielen Büschel $(\alpha^{(2)}\varphi^{(2)})\ldots$ sich zu neuen Büscheln gruppiren.

Die Ebene η werde von ε in der Geraden e und diese von den Geraden $a\ldots$ in den Punkten $\mathfrak{A}\ldots$ geschnitten. Den Punkten $\mathfrak{A}\ldots$ sind die Flächen $\alpha^{(2)}\ldots$, $\varphi^{(2)}\ldots$, $\varkappa^{(2)}\ldots$, $\beta^{(2)}\ldots$, $\gamma^{(2)}\ldots$, ... projectivisch zugeordnet.

Man denke sich nun das Polarhyperboloid $\alpha_e^{(2)}$ von e in Bezug auf die Flächen $\alpha^{(2)}\ldots$ construirt; die conjugirten Geraden der Punkte von e und die Polargeraden von e bezüglich der diesen Punkten homologen Flächen bilden auf $\alpha_e^{(2)}$ zwei projectivische Regelschaaren, die sich in einem Kegelschnitte $A_e^{(2)}$ schneiden. Die Ebene desselben durchdringt das Flächenbüschel $\alpha^{(2)}\ldots$ in einem Kegelschnittbüschel $A^{(2)}\ldots$, in Bezug auf welches $A_e^{(2)}$ der Polarkegelschnitt von e ist.

Sind $\alpha^{(2)}$, $A^{(2)}$, $\mathfrak{A}$ entsprechende Elemente und schneiden sich die Polargerade von e bezüglich $\alpha^{(2)}$ und die conjugirte Gerade von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf das Büschel $\alpha^{(2)}\ldots$ im Punkte A', so liegt A' auf $A_e^{(2)}$ und ist gleichzeitig der Pol von e in Bezug auf $A^{(2)}$ und der conjugirte Punkt von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf das Büschel $A^{(2)}\ldots$

Denkt man sich durch die Kegelschnitte $A^{(2)}\ldots$ und $A_e^{(2)}$ Kegel mit dem Scheitel P gelegt, so ist der Kegel $(P, A_e^{(2)})$ der Polarkegel der Geraden e in Bezug auf das Kegelbüschel $(P, A^{(2)}\ldots)$. Auf ihm fällt die

Polargerade von e bezüglich des Kegels $(P, A^{(2)})$ mit der conjugirten Geraden von $\mathfrak{A}$ bezüglich des Büschels zusammen.

Man bezeichne nun die Polarhyperboloide von e bezüglich der Büschel $\varphi^{(2)}\ldots$, $\beta^{(2)}\ldots$, $\gamma^{(2)}\ldots$, ... mit $\varphi_e^{(2)}$, $\beta_e^{(2)}$, $\gamma_e^{(2)}\ldots$ und dasjenige von e bezüglich des Kegelbüschels $\varkappa^{(2)}\ldots$ mit $\varkappa_e^{(2)}$. Auf jedem der ersteren giebt es einen Kegelschnitt $F_e^{(2)}$, $B_e^{(2)}$, $C_e^{(2)}$, ..., in dessen Punkten sich die Polargeraden von e und die conjugirten Geraden der entsprechenden Punkte von e schneiden. Die Ebenen dieser Kegelschnitte durchdringen die Flächenbüschel in den Kegelschnittbüscheln $F^{(2)}\ldots$, $B^{(2)}\ldots$, $C^{(2)}\ldots$, ... für welche $F_e^{(2)}$, $B_e^{(2)}$, $C_e^{(2)}$, ... die Polarkegelschnitte von e sind. Die Kegel $(P, F_e^{(2)})$, $(P, B_e^{(2)})$, $(P, C_e^{(2)})$, ... sind die Polarkegel von e bezüglich der Büschel $(P, F^{(2)}\ldots)$, $(P, B^{(2)}\ldots)$, $(P, C^{(2)}\ldots)$, ... und auf ihnen müssen die Polargeraden von e mit den conjugirten Geraden der entsprechenden Punkte von e zusammenfallen.

Es soll gezeigt werden, dass diese Eigenschaft auch für den Polarkegel $\varkappa_e^{(2)}$ von e in Bezug auf das Kegelbüschel $\varkappa_e^{(2)}\ldots$ gilt.

Es liegen die Kegel $(P, F^{(2)} A^{(2)} B^{(2)} C^{(2)}\ldots)$ und $\varkappa^{(2)}$ in einem Büschel; den Kegeln dieses Büschels entspricht der Punkt $\mathfrak{A}$. Ferner sei $\eta^{(2)}$ der Polarkegel von e in Bezug auf dieses Büschel und $f'a'b'c'\ldots$ seien die Polargeraden von e. Diese fallen aber mit den conjugirten Geraden des Punktes $\mathfrak{A}$ in Bezug auf die Kegelbüschel $(P, F^{(2)}\ldots)$, $(P, A^{(2)}\ldots)$, $(P, B^{(2)}\ldots)$, $(P, C^{(2)}\ldots)$, ... zusammen. Weil aber das Strahlenbüschel der Polargeraden von e auf $\eta^{(2)}$ projectivisch mit dem Büschel der conjugirten Geraden von $\mathfrak{A}$ ist, so muss auch die Polargerade von e bezüglich $\varkappa^{(2)}$ mit der conjugirten Geraden von $\mathfrak{A}$ bezüglich des Büschels $\varkappa^{(2)}\ldots$ zusammenfallen. Also:

Sind $a\ldots$ Strahlen einer Ebene, die sämmtlich durch einen Punkt P einer Raumcurve $R^{(4)}$ gehen, $\varkappa^{(2)}\ldots$ ihre ersten Polarflächen in Bezug auf den Kegel $\varkappa^{(3)} = (P, R^{(4)})$, und schneidet man diese Strahlen mit einer Geraden e, so sind dieselben derartig projectivisch auf die Kegel $\varkappa^{(2)}\ldots$ bezogen, dass die Polargerade von e bezüglich eines Kegels $\varkappa^{(2)}$ mit dem conjugirten Strahle des entsprechenden Strahles a in Bezug auf das Kegelbüschel $\varkappa^{(2)}\ldots$ zusammenfällt.

6. Die Polarflächen von a und a_1 in Bezug auf den Kegel $\varkappa^{(3)}$ seien $\varkappa^{(2)}$ und $\varkappa_1^{(2)}$, ihre conjugirten Geraden in Bezug auf das Büschel $\varkappa^{(2)}\ldots$ seien a' und a'_1. Mit diesen fallen die Polargeraden von e bezüglich $\varkappa^{(2)}$ und $\varkappa_1^{(2)}$ zusammen, so dass die Ebene $|a'a'_1|$ sowohl die Polarebene von a in Bezug auf $\varkappa_1^{(2)}$ als diejenige von a_1 in Bezug auf $\varkappa^{(2)}$ ist, denn sie enthält die con-

jugirte Gerade von a und die Polargerade von e bezüglich $\varkappa_1^{(2)}$, als auch die conjugirte Gerade von a_1 und die Polargerade von e bezüglich $\varkappa^{(2)}$, mithin folgt:

Sind $\varkappa^{(2)}$ und $\varkappa_1^{(2)}$ die Polarkegel zweier Geraden a und a_1, so fällt die Polarebene von a bezüglich $\varkappa_1^{(2)}$ mit derjenigen von a_1 bezüglich $\varkappa^{(2)}$ zusammen in die gemischte Polarebene der Geraden a und a_1.

Lässt man die Strahlen a und a_1 zusammenfallen, so thun dies auch a' und a'_1, und die Ebene $|a'a'_1|$ geht über in die Berührungsebene des Polarkegels $\varkappa_e^{(2)}$ längs a'; sie ist die Polarebene von a bezüglich $\varkappa^{(2)}$ und heisst die *zweite Polare* des Strahles a; es folgt somit:

Die zweiten Polaren aller Strahlen a durch den Scheitel P eines Kegels $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung, die in einer Ebene liegen, berühren den Polarkegel $\varkappa_e^{(2)}$ einer Geraden e dieser Ebene.

Durch Projection:

Sind $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ die ersten Polaren zweier Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ bezüglich der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$, so fällt die Polare von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{A}_1^{(2)}$ mit derjenigen von $\mathfrak{A}_1$ bezüglich $\mathfrak{A}^{(2)}$ in die gemischte gerade Polare der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zusammen.

Nennt man die Polare $\mathfrak{a}$ eines Punktes $\mathfrak{A}$ bezüglich seiner ersten Polaren die zweite Polare dieses Punktes, so folgt:

Die zweiten Polaren der Punkte einer Geraden berühren den Polarkegelschnitt dieser Geraden in Bezug auf die ersten Polaren ihrer Punkte.

7. Das Flächenbüschel $\varphi^{(2)}\dots$ war projectivisch auf das Polarflächenbüschel $\alpha^{(2)}\dots$ dadurch bezogen, dass je zwei Flächen einander zugeordnet wurden, die sich in P berühren. Beide Flächenbüschel erzeugen eine Fläche $\varphi^{(4)}$ vierter Ordnung, welche in P einen dreifachen Punkt hat. Denn ist g irgend eine Gerade durch P, so wird sie von den Flächenbüscheln in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten. Von den Doppelpunkten derselben fällt der eine, weil sich die entsprechenden Flächen berühren, mit P zusammen; also ist P ein dreifacher Punkt der Fläche $\varphi^{(4)}$.

Weil durch die Schnittcurven der entsprechenden Flächen die Kegel des Büschels $\varkappa^{(2)}\dots$ hindurchgehen, so kann $\varphi^{(4)}$ auch erzeugt werden durch jedes der vorigen Büschel und das Kegelbüschel $\varkappa^{(2)}\dots$; es liegen also auf $\varphi^{(4)}$ die vier Grundstrahlen $g_1 g_2 g_3 g_4$ des letzteren.

Jeder Regelstrahl einer der Flächen $\varphi^{(2)}\dots$ wird von dem entsprechenden Kegel entweder nur in P getroffen und ist daher eine Tangente

von $\varphi^{(4)}$ im Punkte P, oder er fällt ganz mit einem Kegelstrahle zusammen und liegt auf $\varphi^{(4)}$.

Solche Regelstrahlen, welche die letzte Eigenschaft haben, sind diejenigen drei Strahlen, welche in der Ebene ε liegen. Diese schneidet die Raumcurve $R^{(4)}$ ausser in P noch in drei Punkten Q, Q_1, Q_2. Längs jeder dieser Geraden berühren sich aber, wie vorhin gezeigt, eine Fläche $\varphi^{(2)}$ und ihr entsprechender Kegel $\varkappa^{(2)}$, also ist die gemeinschaftliche Berührungsebene beider Flächen auch Berührungsebene von $\varphi^{(4)}$.

Die drei Strahlen PQ, PQ_1, PQ_2 sind den Kegeln $(P, E^{(3)})$ und $\varkappa^{(3)}$ gemeinschaftlich, wenn $E^{(3)}$ der Ort der Pole von ε bezüglich der Flächen des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ ist. Beide Kegel sind von der dritten Ordnung und schneiden sich daher noch in sechs Geraden. Auch von diesen lässt sich nachweisen, dass sie auf der Fläche $\varphi^{(4)}$ liegen.

Ist nämlich a eine beliebige Gerade von ε, $\alpha^{(2)}$ ihr Polarhyperboloid, so berührt dieses in P die Ebene $|at|$ und hat t als Regelstrahl. Dieser ist eine Secante von $E^{(3)}$, und daher hat die Ebene $|at|$ mit $E^{(3)}$ nur noch einen Punkt R gemein, dessen Verbindungsgerade r mit P auch ein Regelstrahl von $\alpha^{(2)}$ ist.

Die Ebene $|at|$ hat mit $R^{(4)}$ in P zwei zusammenfallende Punkte gemein und schneidet diese Curve deshalb noch in zwei Punkten R_1 und R_2, deren Verbindungslinien r_1 und r_2 mit P Regelstrahlen desjenigen Hyperboloids $\varphi^{(2)}$ aus dem Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ sind, welches $\alpha^{(2)}$ in P berührt. Sie sind also Strahlen des Kegels $\varkappa^{(3)}$.

Wenn nun r und r_1 zusammenfallen, so haben die Flächen $\varphi^{(2)}$ und $\alpha^{(2)}$ die Gerade r gemeinsam und dieselbe liegt auf $\varphi^{(4)}$.

Somit hat sich ergeben, dass durch den dreifachen Punkt P der Fläche $\varphi^{(4)}$ dreizehn Gerade der Fläche hindurchgehen, und dass die Tangenten derselben in P die Strahlen des Kegels $\varkappa^{(3)}$ sind.

Da die Fläche $\varphi^{(4)}$ von jeder durch P gelegten Ebene in einer Curve vierter Ordnung geschnitten wird, welche in P einen dreifachen Punkt hat, so muss die Ebene ε dieselbe ausser in PQ, PQ_1, PQ_2 noch in einer Geraden p schneiden, welche nicht durch P geht. *Dieselbe wird daher von je zwei entsprechenden Flächen der projectivischen Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ und $\alpha^{(2)}\dots$ in demselben Punktpaare geschnitten, durch welches auch der entsprechende Kegel aus dem Büschel $\varkappa^{(2)}\dots$ hindurchgeht.*

8. Wenn a eine beliebige Gerade durch P in der Ebene ε, $\alpha^{(2)}$ ihr

Polarhyperboloid in Bezug auf das Büschel $\varphi^{(2)}\ldots$ und in diesem $\varphi^{(2)}$ diejenige Fläche ist, welche $\alpha^{(2)}$ in P berührt, so ist der Kegel $\varkappa^{(2)}$ des Büschels $(\alpha^{(2)}\varphi^{(2)})$, dessen Scheitel in P liegt, die erste Polarfläche von a in Bezug auf $\varkappa^{(3)}$ und die Polarebene $\varkappa$ von a in Bezug auf $\varkappa^{(2)}$ die zweite Polarfläche. Letztere schneide ε in a_1 und die Gerade p (cf. 7) der Fläche $\varphi^{(4)}$ in A_1. Um das Polarhyperboloid $\alpha_1^{(2)}$ von a_1 in Bezug auf das Büschel $\varphi^{(2)}\ldots$ zu construiren, muss man die Polarebenen zweier Punkte von a_1 in Bezug auf die Flächen dieses Büschels zum Durchschnitte bringen. Als diese Punkte wähle man P und A_1.

Wenn A der Schnittpunkt (a, p) ist und die drei Flächen $\alpha^{(2)}\varphi^{(2)}\varkappa^{(2)}$ sich in C und D auf p schneiden, so sind diese Punkte durch A und A_1 harmonisch getrennt; es muss also die Polarebene von A_1 in Bezug auf $\varphi^{(2)}$ durch A gehen. Die Polarebene von P in Bezug auf diese Fläche $\varphi^{(2)}$ ist aber die Berührungsebene $|at|$ in P an dieselbe und geht gleichfalls durch A; folglich ist A ein Punkt des Polarhyperboloids $\alpha_1^{(2)}$ von a_1. Wenn dieses in P die Fläche $\varphi_1^{(2)}$ berührt, und $\varkappa_1^{(2)}$ der Kegel des Büschels $(\alpha_1^{(2)}\varphi_1^{(2)})$ ist, dessen Scheitel in P liegt, so müssen auch $\varphi_1^{(2)}$ und $\varkappa_1^{(2)}$ wegen des letzten Satzes in 7. durch A gehen.

Die Ebene ε kann man aber um a drehen und deshalb a_1 als einen beliebigen Strahl der Ebene $\varkappa$ ansehen; dies aber giebt den Satz:

Ist a ein beliebiger Strahl durch den Scheitel P des Kegels $\varkappa^{(3)}$ und a_1 irgend ein anderer Scheitelstrahl dieses Kegels in der zweiten Polarfläche $\varkappa$ von a, so liegt a in der ersten Polarfläche $\varkappa_1^{(2)}$ von a_1.

Durch Projection:

Liegt ein Punkt auf der ersten Polare eines anderen in Bezug auf die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$, so liegt dieser auf der zweiten Polare von jenem.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Construction der Polarfläche $\alpha^{(2)}$ von a in Bezug auf $\varphi^{(2)}\ldots$. Diese Fläche und ihre Berührungsfläche $\varphi^{(2)}$ im Büschel $\varphi^{(2)}\ldots$ müssen sich in zwei Punkten der Geraden p schneiden, und durch diese Punkte muss auch die erste Polarfläche $\varkappa^{(2)}$ von a hindurchgehen. Dies sind die Voraussetzungen des Beweises; aus ihm aber ergiebt sich in bekannter Weise von Neuem der letzte Satz in 4. (Cf. *Cremona.* Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven.)

V. *Harmonische Eigenschaften von $R^{(4)}$.*

1. Die Flächen $\varphi^{(2)}\ldots$ schneiden a in einer zu diesen Flächen projectivischen Punktreihe $F\ldots$; die conjugirten Geraden $f\ldots$ der Punkte $F\ldots$

in Bezug auf das Büschel $\varphi^{(2)}$... erfüllen eine ihm projectivische Regelschaar auf dem Polarhyperboloide $\alpha^{(2)}$ von a. Durch jeden Punkt F von a gehen zwei Secanten $f'f''$ der Raumcurve $R^{(4)}$, nämlich die Regelstrahlen der Fläche $\varphi^{(2)}$, auf welcher F liegt. In der Ebene $|f'f''|$, welche die Berührungsebene durch F an $\varphi^{(2)}$ ist, liegt auch die conjugirte Gerade f, und die Schnittpunkte (ff') und (ff'') trennen F von der Raumcurve harmonisch. Diese beiden Schnittpunkte erhält man aber auch als Durchschnitte von f und $\varphi^{(2)}$. — Irgend eine Ebene $\varkappa$ schneidet das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel und die Regelschaar in einer zu letzterem projectivischen Punktreihe auf einem Kegelschnitte $K^{(2)}$. Durch fünf Punkte desselben gehen die entsprechenden Kegelschnitte und der Ort der Schnittpunkte der Flächen $\varphi^{(2)}$... und der entsprechenden Regelstrahlen f... ist also eine Raumcurve $R^{(5)}$ fünfter Ordnung.

Legt man $\varkappa$ durch P, so ist P einer der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels; der Kegelschnitt $K^{(2)}$ geht aber auch durch P, da die Tangente t der Raumcurve $R^{(4)}$ in P zu den Regelstrahlen f... gehört. Das Strahlenbüschel, welches die Punktreihe auf $K^{(2)}$ aus P projicirt, ist dem Kegelschnittbüschel projectivisch und erzeugt mit ihm eine ebene Curve dritter Ordnung, welche in P einen Doppelpunkt hat; sie schneidet daher $K^{(2)}$ noch in vier Punkten, durch welche die entsprechenden Kegelschnitte hindurchgehen müssen. Einer dieser Punkte ist aber P, also giebt es in jeder durch P gelegten Ebene ausser P nur drei Punkte der Curve $R^{(5)}$; dieselbe hat also in P einen Doppelpunkt.

Die Ebene durch einen Punkt F und den entsprechenden Regelstrahl f ist aber Berührungsebene an die entsprechende Fläche $\varphi^{(2)}$; denn in dieser Ebene liegt die conjugirte Gerade f von F. Sind $f'f''$ die beiden Regelstrahlen durch F auf $\varphi^{(2)}$, die also Secanten von $R^{(4)}$ sein müssen, so werden ihre Schnittpunkte mit $R^{(4)}$ durch F und f, also auch durch a und $R^{(5)}$ harmonisch getrennt. Somit ergiebt sich:

Wenn eine Gerade a einer Raumcurve $R^{(4)}$ vierter Ordnung in einem Punkte P begegnet, so ist der Ort eines Punktes, der a von $R^{(4)}$ harmonisch trennt, eine Raumcurve $R^{(5)}$ fünfter Ordnung, welche in P einen Doppelpunkt hat. Sie geht auch durch die Berührungspunkte der sechs durch a an $R^{(4)}$ gelegten Berührungsebenen.

Der letzte Theil folgt sofort aus einer bekannten Eigenschaft der harmonischen Punkte.

2. Wählt man als Schnittebene $\varkappa$ eine Berührungsebene des Hyperboloids $\alpha^{(2)}$, so zerfällt der Kegelschnitt $K^{(2)}$ in die beiden Regelstrahlen k und l dieser Ebene, k sei derjenige, welcher nicht zu der betrachteten Regelschaar gehört. Er wird daher von den Strahlen der letzteren in einer zum Kegelschnittbüschel projectivischen Punktreihe geschnitten; durch drei Punkte der letzteren gehen ihre entsprechenden Kegelschnitte, also trifft k die Raumcurve in drei Punkten, l nur in zwei:

Die Regelschaaren von $\alpha^{(2)}$ bestehen aus den Polargeraden von a und aus den conjugirten Geraden der Punkte von a; die ersteren schneiden die Raumcurve $R^{(5)}$ in drei, die letzteren in zwei Punkten. Die beiden durch P gehenden Regelstrahlen von $\alpha^{(2)}$ sind die Tangenten des Doppelpunktes für $R^{(5)}$.

3. Es sei β eine Berührungsebene durch a an $R^{(4)}$, welche diese Curve in B berühren und in C schneiden mag. Die Tangente b in B trifft $R^{(4)}$ in zwei mit B zusammenfallenden Punkten B_1 und B_2. Denkt man sich durch den Schnittpunkt $(ab) = A$ denjenigen Strahl construirt, welcher a von AC und AB harmonisch trennt, so trifft er die Geraden CB_1 und CB_2 in den beiden zusammenfallenden Punkten B_1' und B_2', und die Ebene β ist daher auch eine Berührungsebene von $R^{(5)}$. Die Tangente im Berührungspunkte ist AB_1', also:

Jede Berührungsebene durch a an $R^{(4)}$ ist auch eine Berührungsebene an $R^{(5)}$; die Tangenten in den beiden Berührungspunkten schneiden sich in einem Punkte von a.

4. Es sei b die Polargerade von a in Bezug auf eine Fläche $\varphi^{(2)}$; projicirt man aus ihr die Strahlen derjenigen Regelschaar von $\alpha^{(2)}$, zu welcher diese Polargerade nicht gehört, so erhält man ein Ebenenbüschel (B). welches mit dem Flächenbüschel $\varphi^{(2)}$... projectivisch ist. Beide Büschel erzeugen eine Fläche $\varphi^{(3)}$ dritter Ordnung, auf welcher die Gerade b liegt. Diese schneidet $\alpha^{(2)}$ in $R^{(5)}$. Wenn b seine Regelschaar auf $\alpha^{(2)}$ durchläuft, so ändert sich $\varphi^{(3)}$, geht aber immer durch $R^{(4)}$ und $R^{(5)}$, also:

Durch die beiden Raumcurven $R^{(4)}$ und $R^{(5)}$ lassen sich unendlich viele Flächen dritter Ordnung legen.

5. Wenn man die Raumcurve $R^{(5)}$ aus ihrem Doppelpunkte P auf die Ebene η projicirt, so ist die Projection eine ebene Curve $\mathfrak{R}_1^{(3)}$ dritter Ordnung. Ist $\mathfrak{A}$ der Durchschnitt von a und η, so wird die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{R}_1^{(3)}$ harmonisch getrennt:

Alle Punkte, welche einen festen Punkt $\mathfrak{A}$ von einer ebenen Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$

dritter Ordnung harmonisch trennen, liegen auf einer anderen Curve $\mathfrak{R}_1^{(3)}$ dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten geht, die sich von $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{R}^{(3)}$ ziehen lassen. (*R.* Seite 203.)

6. Wenn a eine Secante von $R^{(4)}$ ist, so muss man die benutzte Methode zur Bestimmung des Ortes derjenigen Punkte, welche a von $R^{(4)}$ harmonisch trennen, abändern.

Durch jeden Punkt S von a geht nur eine Secante s der Raumcurve $R^{(4)}$, und diese ist ein Regelstrahl derjenigen Fläche $\varphi^{(2)}$, auf welcher a liegt. Ist $\varphi_1^{(2)}$ irgend eine andere Fläche des Büschels und σ die Polarebene von S in Bezug auf dieselbe, welche s in S' treffen mag, so sind S und S' durch die Raumcurve $R^{(4)}$ harmonisch getrennt. Wenn S die Gerade a durchläuft, so beschreibt σ ein projectivisches Ebenenbüschel, dessen Axe a' sei. Irgend eine Ebene schneidet die Regelschaar $s\ldots$ in einer Punktreihe $R\ldots$ eines Kegelschnittes und das Ebenenbüschel $a'(\sigma\ldots)$ in einem projectivischen Strahlenbüschel $A'(r\ldots)$. Von den Strahlen desselben gehen drei durch die entsprechenden Punkte des Kegelschnittes, also liegen in jeder Ebene drei Punkte des gesuchten Ortes und dieser ist eine Raumcurve $R^{(3)}$ dritter Ordnung.

Die Secante a schneide $R^{(4)}$ in P und Q. Wenn S mit P zusammenfällt, so fällt der durch P gehende Regelstrahl von $\varphi^{(2)}$ mit der Tangente t in P an $R^{(4)}$ zusammen. Diese ist aber auch Tangente an $\varphi_1^{(2)}$ und die Polarebene von P nach $\varphi_1^{(2)}$ geht durch t. Daher muss P ein Punkt von $R^{(3)}$ sein und ebenso Q. Daraus folgt:

Der Ort des Punktes, welcher die Punkte einer Secante einer Raumcurve $R^{(4)}$ vierter Ordnung von dieser harmonisch trennt, ist eine Raumcurve $R^{(3)}$ dritter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte der Secante mit der Raumcurve $R^{(4)}$ geht.

Die Raumcurve $R^{(3)}$ wird aus P durch einen Kegel $\varkappa^{(2)}$ zweiter Ordnung projicirt, welcher den Kegel $\varkappa^{(3)} = (P, R^{(4)})$ längs $a = PQ$ berührt und ihn harmonisch von PQ trennt. Dieser Kegel schneidet η in der ersten Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$ des Punktes $\mathfrak{A} = (a, \eta)$, also:

Die erste Polare $\mathfrak{A}^{(2)}$ eines Punktes $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{R}^{(3)}$ trennt diesen Punkt von der Curve harmonisch.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich ein neuer Beweis für den Satz in IV. 6, dessen erster Theil von Herrn *Sturm* herrührt (Zeitschrift für Mathematik und Physik XXIII. 5. Seite 344).

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei Schnittpunkte einer Geraden $\mathfrak{g}$ mit der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$, $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ die ersten. Polaren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche $\mathfrak{g}$ noch in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ schneiden mögen, so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ harmonische Punkte. Denkt man durch $\mathfrak{A}$ die der Geraden $\mathfrak{g}$ unendlich benachbarte Gerade $\mathfrak{g}'$ gezogen, welche $\mathfrak{R}^{(3)}$ und $\mathfrak{A}^{(2)}$ in $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{A}_1'$ schneiden mag, so sind auch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ harmonische Punkte, und es treffen sich die Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ in einem Punkte $\mathfrak{A}''$. Diese Geraden sind aber die Tangenten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ in den Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Auf dieselbe Art erkennt man, dass auch die Tangenten $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ in den Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ an $\mathfrak{B}^{(2)}$ und $\mathfrak{R}^{(3)}$ sich in einem Punkte $\mathfrak{B}''$ schneiden. Setzt man die Schnittpunkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{D}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{A}'''$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{B}'''$, so sind $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'''\mathfrak{D}\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'''\mathfrak{D}\mathfrak{A}''$ je vier harmonische Punkte. Deshalb treffen sich die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''$ in einem Punkte und dieses muss der Punkt $\mathfrak{C}$ sein. Die Gerade $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ ist aber die gemeinsame Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$; denn erstens müssen beide Polaren durch $\mathfrak{C}$ gehen, weil $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ harmonisch getrennt ist; zweitens ist aber $\mathfrak{A}'''$ der Schnittpunkt der Tangenten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ an $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}'''$ der Schnittpunkt der Tangenten in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ an $\mathfrak{B}^{(2)}$. Dadurch ist aber bewiesen, dass die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$ mit derjenigen von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ zusammenfällt, und diese Eigenschaft gilt für je zwei der drei Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Von ihr kommt man auf folgende Art zum allgemeinen Satze.

Die ersten Polaren der Punkte von $\mathfrak{g}$ in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(3)}$ bilden ein Büschel; die Pole von $\mathfrak{g}$ in Bezug auf diese ersten Polaren liegen auf dem Polarkegelschnitte $\mathfrak{G}^{(2)}$ von $\mathfrak{g}$ bezüglich dieses Büschels und bilden eine zu diesen Polaren projectivische Punktreihe. Ist also $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{E}^{(2)}$ seine erste Polare, sind $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{E}_0$ die Pole von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{E}^{(2)}$, so ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}) \barwedge (\mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{B}^{(2)}\mathfrak{C}^{(2)}\mathfrak{E}^{(2)}) \barwedge (\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{E}_0).$$

Sind $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{B}_0'\mathfrak{C}_0'\mathfrak{E}_0'$ die conjugirten Punkte zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}$, so ist auch

$$(\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0\mathfrak{E}_0) \barwedge (\mathfrak{A}_0'\mathfrak{B}_0'\mathfrak{C}_0'\mathfrak{E}_0').$$

Da nun die Polare von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Gerade $\mathfrak{A}_0'\mathfrak{B}_0$ und diejenige von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}^{(2)}$ die Gerade $\mathfrak{B}_0'\mathfrak{A}_0$ ist, diese beiden Geraden aber zusammenfallen, so müssen auch $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_0'$ zusammenfallen, und, wie auf gleiche Weise folgt, auch $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_0'$ und daher auch $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{E}_0'$.

Ist $\mathfrak{F}$ ein weiterer Punkt von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$ seine erste Polare, $\mathfrak{F}_0$ sein con-

jugirter Punkt. $\mathfrak{F}_0$ der Pol von g nach $\mathfrak{F}^{(2)}$. so folgt auf dieselbe Art, dass auch $\mathfrak{F}_0$ und $\mathfrak{F}'_0$ zusammenfallen.

Nun ist $\mathfrak{E}'_0\mathfrak{F}_0$ die Polare von $\mathfrak{E}$ nach $\mathfrak{F}^{(2)}$ und $\mathfrak{F}'_0\mathfrak{E}_0$ diejenige von $\mathfrak{F}$ nach $\mathfrak{E}^{(2)}$, und da sie zusammenfallen. so ist der Satz IV. 6 von Neuem bewiesen.

7. Die beiden Regelstrahlen der Fläche $\varphi^{(2)}$, welche durch P gehen, seien r_1 und r_2; jedem von ihnen begegnen vier Tangenten von $R^{(4)}$, dem ersten die Tangenten $c_2d_2e_2f_2$, dem zweiten die Tangenten $c_1d_1e_1f_1$. Da aber alle Secanten von $R^{(4)}$, welche eine Secante dieser Raumcurve schneiden, ein Hyperboloid erfüllen (*R.* Seite 150), so liegen die acht Tangenten auf $\varphi^{(2)}$. Da r_1 und r_2 sich schneiden. so gehören sie verschiedenen Regelschaaren an; dies gilt also auch von den Tangentengruppen $c_1d_1e_1f_1$ und $c_2d_2e_2f_2$, und jede Tangente der einen Gruppe muss jede Tangente der anderen Gruppe treffen.

Im Büschel $\varphi^{(2)}\ldots$ kommen vier Kegel $\sigma_1^{(2)}\sigma_2^{(2)}\sigma_3^{(2)}\sigma_4^{(2)}$ vor, deren Scheitel S_1, S_2, S_3, S_4 sein mögen. — Die Polarebenen der Berührungspunkte C_1 und C_2 von c_1 und c_2 bezüglich der Flächen $\varphi^{(2)}\ldots$ bilden zwei projectivische Ebenenbüschel mit den Axen c_1 und c_2 und erzeugen einen Kegel $\varkappa^{(2)}$, welcher durch die Scheitel S_1, S_2, S_3, S_4 gehen muss, da jedes Polarhyperboloid durch dieselben geht. Uebrigens sind auch die Ebenen $|c_1S_1|$ und $|c_2S_1|$ die Polarebenen von C_1 und C_2 in Bezug auf $\sigma_1^{(2)}$, also homolog in der projectivischen Beziehung. Sie schneiden sich in S_1, und ebenso folgt, dass auch in S_2, S_3, S_4 sich homologe Ebenen schneiden und $\varkappa^{(2)}$ also durch die vier Kegelscheitel geht.

Die Ebene $|c_1S_1|$ berührt den Kegel $\sigma_1^{(2)}$ längs dem Kegelstrahle S_1C_1, dieser mag der Raumcurve $R^{(4)}$ in einem Punkte X begegnen; dann muss ihre Tangente x in X, da sie in der Ebene $|c_1S_1|$ liegt, die Tangente c_1 treffen. Es ist also x eine der Tangenten $c_2d_2e_2f_2$, etwa c_2. Also liegt c_2 in der Ebene $|c_1S_1|$, und ebenso zeigt man, dass $d_2e_2f_2$ in den Ebenen $|c_1S_2|$, $|c_1S_3|$, $|c_1S_4|$ und andererseits $c_1d_1e_1f_1$ in den Ebenen $|c_2S_1|$, $|c_2S_2|$, $|c_2S_3|$, $|c_2S_4|$ liegen. Da nun

$$c_1|S_1S_2S_3S_4| \;\overline{\wedge}\; c_2|S_1S_2S_3S_4|,$$

so ist auch

$$c_1|c_2d_2e_2f_2| \;\overline{\wedge}\; c_2|c_1d_1e_1f_1|.$$

Weil aber die acht Tangenten $c_1d_1e_1f_1c_2d_2e_2f_2$ mit r_1r_2 auf dem Hyperboloid $\varphi^{(2)}$ liegen, so ist auch

$$r_1 | c_2 d_2 e_2 f_2 | \;\overline{\wedge}\; r_2 | c_1 d_1 e_1 f_1 |.$$

Man erhält daraus:

Die Ebenen, welche eine Tangente der Raumcurve $R^{(4)}$ mit den vier Kegelscheiteln verbinden, haben ein constantes Doppelverhältniss,

und hieraus durch Projection:

Die Tangenten, welche sich von einem Punkt der ebenen Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ an diese ziehen lassen, haben ein constantes Doppelverhältniss.

8. Es sei a ein beliebiger Strahl des Kegels $\varkappa^{(3)}$, also eine Secante der Raumcurve $R^{(4)}$ durch den Punkt P. Durch dieselbe lassen sich an $R^{(4)}$ oder $\varkappa^{(3)}$ vier Berührungsebenen $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ legen, deren Berührungsstrahlen $b_1 b_2 b_3 b_4$ sein mögen. Legt man durch b_1 eine beliebige Ebene ε, welche $\varkappa^{(3)}$ noch in den Strahlen $c_1 c_2$ schneidet, und durch b_2 die Ebenen $|b_2 c_1|$ und $|b_2 c_2|$, welche $\varkappa^{(3)}$ noch in d_1 und d_2 schneiden, so lässt sich zeigen, dass die Ebene $|b_1 d_1|$ auch d_2 in sich aufnimmt. — Man sehe die Ebenenpaare β_1, $|b_1 b_2|$ und β_2, $|b_2 b_1|$; ε, $|b_1 d_1|$ und $|b_2 c_1|$, $|b_2 c_2|$ als Ebenenpaare von Involutionen an, so sind diese dadurch bestimmt. Ist nun e_1 ein beliebiger Kegelstrahl, so kann man die Involutionen projectivisch auf einander beziehen, wenn man jene Paare und die Ebenen $|b_1 e_1|$ und $|b_2 e_1|$ einander zuordnet. Die projectivischen Involutionen erzeugen einen Kegel dritter Ordnung, der mit $\varkappa^{(3)}$ zusammenfallen muss, weil er mit ihm neun Strahlen gemeinschaftlich hat, nämlich die doppelt zu zählenden Berührungsstrahlen b_1 und b_2 und die Strahlen a, c_1, c_2, d_1, e_1, also muss auch d_2 auf $\varkappa^{(3)}$ liegen, und es folgt:

Jeder Kegel dritter Ordnung kann auf unendlich viele Arten durch projectivische Ebeneninvolutionen zweiter Ordnung erzeugt werden.

Die Strahlen b_1 und b_2 liegen im Allgemeinen auf verschiedenen Hyperboloiden $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$. Sind $\pi_1\pi_1'$ und $\pi_2\pi_2'$ zwei Paar entsprechende Ebenen, so schneiden die ersten $\varphi_1^{(2)}$ und die letzten $\varphi_2^{(2)}$ in je zwei Regelstrahlen $p_1 p_1'$ und $p_2 p_2'$, die mit b_1 und b_2 nicht zu derselben Schaar gehören. Auf diesen Regelschaaren werden durch die projectivischen Ebenenbüschel projectivische Involutionen bestimmt.

Die Ebenen π_1 und π_2 mögen sich in q schneiden, so trifft q die Raumcurve $R^{(4)}$ ausser in P noch in einem Punkte Q. Die Regelstrahlen der Flächen $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$, welche dem Strahle q begegnen, können dies nur in den Punkten P und Q thun, also müssen die Regelstrahlen p_1 und p_2, in denen die Ebenen π_1 und π_2 die Flächen $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$ schneiden, sich in Q treffen. Daraus aber folgt sofort:

Die Raumcurve $R^{(4)}$ wird durch zwei involutorische projectivische Regelschaaren, die auf zwei verschiedenen Flächen des Büschels $\varphi^{(2)}$... liegen, erzeugt.

Es kann der Kegel $\varkappa^{(3)}$ durch vier Involutionen mit den Axen b_1, b_2, b_3, b_4, welche denselben Tangentialstrahl haben, erzeugt werden; diese liegen auf verschiedenen Hyperboloiden $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$, $\varphi_3^{(2)}$, $\varphi_4^{(2)}$; auf ihnen lassen sich diejenigen Regelschaaren, zu denen jene Axen nicht gehören, in solche involutorisch-projectivische Beziehung setzen, dass je zwei involutorisch-projectivische Regelschaaren die Raumcurve $R^{(4)}$ erzeugen. Also:

Die Hyperboloide eines Büschels lassen sich in Gruppen zu je vier so theilen, dass man auf ihnen Regelschaaren in solche involutorisch-projectivische Beziehung bringen kann, dass sie zu je zweien die Grundcurve des Büschels erzeugen.

Vier solche Hyperboloide stehen in einem ähnlichen Zusammenhange, wie die vier Kegel des Büschels, denn die Strahlen derselben werden durch die Grundcurve auch involutorisch gepaart und in projectivische Beziehung gebracht.

Es entsteht nun die Frage, ob es im Büschel nicht ein solches Hyperboloid giebt, dessen beide Regelschaaren durch die Grundpunkte des Büschels in involutorisch-projectivische Beziehung gesetzt werden.

Die Berührungsebenen der Flächen des Büschels $\varphi^{(2)}$... im Punkte P gehen durch die Tangente t der Raumcurve, ihre Berührungsstrahlen mit den einzelnen Flächen seien $r'r''$,... . Schneidet man den Kegel $\varkappa^{(3)}$ mit der Ebene η in der Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ und $R^{(4)}$ in den vier Punkten $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4$, die Strahlen $r'r''$,... in den Punkten $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$,..., so liegen die vier Punkte $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4$ mit je zwei Punkten $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{F}^{(2)}$, dem Durchschnitte von η mit derjenigen Fläche $\varphi^{(2)}$, welche die Strahlen $r'r''$ enthält; daher liegen auch die sechs Strahlen $P(\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4)$ und $r'r''$ auf einem Kegel. Da von den vier Punkten $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4$ drei die Ebene η bestimmen, so hat man folgenden Satz:

Auf jeder durch P gehenden Fläche des Büschels $\varphi^{(2)}$... giebt es zwei Regelstrahlen; legt man durch sie und drei beliebige Strahlen von $\varkappa^{(3)}$ die Kegel zweiter Ordnung, so schneiden sie sich noch in einem vierten Strahle.

Daraus folgt für den Durchschnitt $\mathfrak{R}^{(3)}$ von $\varkappa^{(3)}$ mit η, wenn man mit $\mathfrak{T}$ den Schnittpunkt (t, η) bezeichnet:

Legt man durch die Schnittpunkte $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$ einer durch $\mathfrak{T}$ gelegten Geraden $\mathfrak{g}$ und durch irgend drei feste Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ von $\mathfrak{R}^{(3)}$ einen Kegel-

schnitt $\mathfrak{F}^{(2)}$, *so schneidet dieser* $\mathfrak{R}^{(3)}$ *noch in einem vierten Punkte* $\mathfrak{A}_4$; *wenn* $\mathfrak{g}$ *sich um* $\mathfrak{T}$ *dreht, so durchläuft* $\mathfrak{F}^{(2)}$ *ein Büschel mit den Grundpunkten* $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4$.

In $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ denke man sich an $\mathfrak{R}^{(3)}$ die Tangenten gezogen, welche diese Curve noch in $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ schneiden mögen; ebenso schneide man mit den Tangenten in $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_4$ die Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ noch in $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_4$, dann liegen die sechs Punkte $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_4 \mathfrak{S}' \mathfrak{S}''$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$; wenn $\mathfrak{g}$ sich um $\mathfrak{T}$ dreht, so durchläuft $\mathfrak{B}^{(2)}$ das Büschel mit den Grundpunkten $\mathfrak{B}_1 \dots \mathfrak{B}_4$ und die Gerade $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''$ geht durch den Tangentialpunkt $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$. Von $\mathfrak{U}$ lassen sich an $\mathfrak{R}^{(3)}$ vier Tangenten legen; in den Berührungspunkten derselben fallen zwei Punkte $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''$ zusammen. Es kommt also viermal vor, dass die Tangenten in zwei Punkten $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$ eines Strahles $\mathfrak{g}$ sich auf $\mathfrak{R}^{(3)}$ schneiden oder, wenn man das Resultat auf den Kegel $\varkappa^{(3)}$ überträgt, dass die Tangentialebenen an $\varkappa^{(3)}$ durch zwei Strahlen $r'r''$, die auf derselben Fläche $\varphi^{(2)}$ liegen, sich in einem Strahle dieses Kegels treffen. Es haben also r' und r'' denselben Tangentialstrahl; daher kann $\varkappa^{(3)}$ durch zwei projectivische Ebeneninvolutionen mit den Axen r' und r'' erzeugt werden. Bezeichnet man zwei homologe Ebenenpaare derselben mit $\alpha'\beta'$ und $\alpha''\beta''$, so schneiden diese die Fläche $\varphi^{(2)}$, auf der r' und r'' liegen, in den Strahlenpaaren $a'b'$ und $a''b''$ der beiden Regelschaaren; die beiden ersten werden von den beiden letzten in den vier Punkten $(a'a'')$, $(a'b'')$, $(b'a'')$, $(b'b'')$ der Raumcurve $R^{(4)}$ auf den Kegelstrahlen $(\alpha'\alpha'')$, $(\alpha'\beta'')$, $(\beta'\alpha'')$, $(\beta'\beta'')$ geschnitten. Demnach ordnen die projectivischen Ebeneninvolutionen die Regelschaaren in zwei projectivische Involutionen, deren entsprechende Strahlen sich auf $R^{(4)}$ schneiden. Daraus folgt:

In einem Büschel von Flächen $\varphi^{(2)}\dots$ *zweiter Ordnung giebt es vier Flächen, so dass auf jeder von ihnen die beiden Regelschaaren in projectivische Involutionen geordnet werden können, welche die Grundcurve* $R^{(4)}$ *des Flächenbüschels erzeugen.*

VI. *Curvenbüschel dritter Ordnung.*

1. Auf der Raumcurve $R^{(4)}$ seien $PA_1 \dots A_6$ sieben beliebige Punkte, und durch $R^{(4)}$ sei $\varphi^{(2)}$ eine beliebige Fläche zweiter Ordnung. Die durch P gehenden Regelstrahlen derselben seien $r_1 r_2$. Projicirt man nun $R^{(4)}$ und $A_1 \dots A_6$ auf die Ebene η, so erhält man als Projection eine ebene Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung und auf ihr die Projectionen $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_6$ von $A_1 \dots A_6$ und die Schnittpunkte $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ mit $r_1 r_2$.

Legt man durch $PA_1 \dots A_6$ auf $\varphi^{(2)}$ irgend eine andere Curve $R_1^{(4)}$, so muss diese $R^{(4)}$ in einem festen Punkte A_7 schneiden, welcher mit $PA_1 \dots A_6$ eine Gruppe associirter Punkte bildet (*R*. Seite 152). Die Projection $\mathfrak{R}_1^{(3)}$ von $R_1^{(4)}$ geht durch die Projection $\mathfrak{A}_7$ von A_7, und somit ergiebt sich:

Zwei ebene Curven dritter Ordnung durch dieselben acht Punkte schneiden sich noch in einem festen neunten Punkte; durch diese neun Punkte geht ein Büschel von Curven dritter Ordnung.

Man kann die Abhängigkeit des neunten Punktes von den acht gegebenen auch anders auffassen. Sind nämlich $PA_1 \dots A_7$ acht associirte Punkte, $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_7$ die Projectionen der sieben letzten, $\mathfrak{R}^{(3)}$ eine Curve dritter Ordnung durch dieselben, die als Projection einer Raumcurve vierter Ordnung aufzufassen ist, $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt von $\mathfrak{R}^{(3)}$, so giebt es eine Raumcurve $R^{(4)}$ durch $PA_1 \dots A_7$, welche die Gerade $P\mathfrak{R}_1 = r_1$ schneidet. Durch diese Raumcurve lässt sich ein Hyperboloid $\varphi^{(2)}$ legen, welches r_1 als Regelstrahl hat. Der zweite Regelstrahl r_2 auf $\varphi^{(2)}$, welcher durch P geht, muss $R^{(4)}$ und daher auch $\mathfrak{R}^{(3)}$ in einem Punkte $\mathfrak{R}_2$ begegnen. Auf $\varphi^{(2)}$ giebt es aber unendlich viele Raumcurven $R^{(4)} \dots$ vierter Ordnung durch $PA_1 \dots A_7$; alle müssen den Strahlen r_1 und r_2 begegnen und alle Projectionen gehen durch $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_7 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$. — Es hängt also $\mathfrak{R}_2$ in ganz bestimmter Art von $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_7 \mathfrak{R}_1$ ab, ebenso wie $\mathfrak{A}_7$ von $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_6 \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$.

2. Die Raumcurven $R^{(4)} \dots$ sind die Durchschnitte von $\varphi^{(2)}$ mit einem Büschel von Flächen $\varrho^{(2)} \dots$ zweiter Ordnung. Irgend eine Ebene π durch P schneidet $\varphi^{(2)}$ und $\varrho^{(2)} \dots$ in den Kegelschnitten $F^{(2)}$ und $R^{(2)} \dots$, von denen die letzten ein Büschel bilden, dessen einer Grundpunkt P ist, und $F^{(2)}$ in den Punktgruppen einer kubischen Involution schneiden. Die Projectionen derselben bilden auf der Schnittlinie (η, π) auch eine kubische Involution und sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Curven $\mathfrak{R}^{(3)} \dots$.

Wenn π durch einen der sieben Punkte $A_1 \dots A_7$ geht, so schneiden die Kegelschnitte $R^{(2)} \dots$ den Kegelschnitt $F^{(2)}$ in einer quadratischen Involution, weil $F^{(2)}$ durch zwei Grundpunkte des Büschels $R^{(2)} \dots$ geht. Die Projectionen derselben bilden auf (η, π) eine quadratische Involution:

Die Curven $\mathfrak{R}^{(3)} \dots$ dritter Ordnung eines Büschels schneiden eine beliebige Gerade in einer kubischen, und wenn dieselbe durch einen Grundpunkt geht, in einer quadratischen Involution.

Der letzte Theil des Satzes gilt auch, wie leicht erkennbar, wenn die Gerade durch $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$ geht.

Durch den Punkt P auf der Raumcurve $R^{(4)}$ des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ lege man eine beliebige Fläche $\psi^{(2)}$ zweiter Ordnung; diese wird von den Flächen des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ in einem Büschel von Raumcurven $F^{(4)}\dots$ geschnitten, dessen Grundpunkte auf $R^{(4)}$ liegen. Einer dieser Grundpunkte ist P. Die Projectionen dieser Raumcurven $F^{(4)}\dots$ sind ebene Curven $\mathfrak{F}^{(3)}\dots$ dritter Ordnung mit neun gemeinschaftlichen Punkten, nämlich den Projectionen der sieben Grundpunkte des Büschels $F^{(4)}\dots$, in denen sich ausser P diese Curven noch schneiden, und ausserdem denjenigen beiden Punkten, in denen die durch P gehenden Regelstrahlen der Fläche $\psi^{(2)}$ die Ebene η treffen.

Die Fläche $\psi^{(2)}$ bildet mit jeder Fläche des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ ein neues Büschel $(\varphi^{(2)}\psi^{(2)})$; in Bezug auf dieses sei $\alpha^{(2)}$ das Polarhyperboloid einer durch P gehenden Geraden a. Wenn $\varphi^{(2)}$ das Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ durchläuft, so durchläuft auch $\alpha^{(2)}$ ein Büschel, dessen Grundcurve aus der Polargeraden q von a in Bezug auf $\psi^{(2)}$ und aus derjenigen Raumcurve $A^{(3)}$ dritter Ordnung besteht, auf welcher die conjugirten Punkte zu den Punkten von a in Bezug auf das Bündel $(\psi^{(2)}\varphi^{(2)}\dots)$ liegen (*R.* Seite 229).

Ist P' der dem Punkte P auf a unendlich benachbarte Punkt, so giebt es unter den Flächen des Büschels $(\varphi^{(2)}\psi^{(2)})$ eine $\mu^{(2)}$, welche durch P' geht, also a in P berührt. Alle Flächen dieses Büschels haben in P eine gemeinschaftliche Tangente f, die Tangente der Raumcurve $F^{(4)}$ im Punkte P; es berührt also $\mu^{(2)}$ die Ebene $|af|$ in P, und daher muss die Polargerade r von a in Bezug auf $\mu^{(2)}$ in der Ebene $|af|$ liegen und durch P gehen.

Wenn das Büschel $(\varphi^{(2)}\psi^{(2)})$ alle Büschel durchläuft, die $\psi^{(2)}$ mit den Flächen $\varphi^{(2)}\dots$ bildet, so durchläuft auch $\mu^{(2)}$ ein Büschel. Denn alle Flächen $\mu^{(2)}$ gehören dem Bündel $(\psi^{(2)}\varphi^{(2)}\dots)$ an und gehen durch den Punkt P (*R.* Seite 231).

Weil r in der Ebene $|af|$ liegt und die Ebene $|fr| = |fa|$ die Berührungsebene des Polarhyperboloids $\alpha^{(2)}$ von a in Bezug auf das Büschel $(\varphi^{(2)}\psi^{(2)})$ ist, so ist $\mu^{(2)}$ diejenige Fläche des letzteren, welche $\alpha^{(2)}$ berührt. Die Schnittcurve beider Flächen ist eine Raumcurve $A^{(4)}$, welche in P einen Doppelpunkt hat und aus P durch einen Kegel $\varkappa^{(2)}$ zweiter Ordnung projicirt wird, dessen Durchschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ mit der Ebene η die erste Polare des Punktes $\mathfrak{A} = (a, \eta)$ in Bezug auf $\mathfrak{F}^{(3)}$ ist.

Ordnet man je zwei Flächen der Büschel $\alpha^{(2)}\dots$ und $\mu^{(2)}\dots$, welche

sich in P berühren, einander zu, so sind diese Büschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Oberfläche $\psi^{(4)}$ vierter Ordnung, die in P einen dreifachen Punkt hat.

Sind nun $\alpha^{(2)}$ und $\mu^{(2)}$, $\alpha_1^{(2)}$ und $\mu_1^{(2)}$ entsprechende Flächen, welche sich in den Raumcurven $A^{(4)}$ und $A_1^{(4)}$ schneiden, so geht durch $A^{(4)}$ ein Kegel $\varkappa^{(2)}$ mit dem Scheitel P. Durch die Raumcurve, in welcher derselbe ausser $A^{(4)}$ die Fläche $\psi^{(4)}$ schneidet, und durch $A_1^{(4)}$ muss sich eine Fläche zweiter Ordnung legen lassen (*R.* Seite 230, 231). Weil aber $\varkappa^{(2)}$ ausser $A^{(4)}$ mit der Fläche $\psi^{(4)}$ nur ihren dreifachen Punkt P gemein hat, so muss diese Fläche zweiter Ordnung auch ein Kegel $\varkappa_1^{(2)}$ sein. Aendern sich nun $\alpha_1^{(2)}$ und $\mu_1^{(2)}$, so ändert sich auch $A_1^{(4)}$ und der Kegel $\varkappa_1^{(2)}$; alle so erhaltenen Kegel bilden aber ein Büschel (*R.* Seite 231).

Daraus aber folgt sofort:

Die ersten Polaren eines Punktes in Bezug auf die Curven $\mathfrak{F}^{(3)}$... dritter Ordnung eines Büschels bilden selbst ein Büschel.

Einen anderen synthetischen Beweis dieses Satzes findet man im 89. Bande dieses Journals, Seite 144.

VII. *Von jetzt ab liegt das Projectionscentrum P ausserhalb der Raumcurve $R^{(4)}$.*

1. Die Projection von $R^{(4)}$ auf eine beliebige Bildebene η ist eine Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierter Ordnung, welche zwei Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ hat; durch den Punkt P geht nämlich eine Fläche $\varphi_p^{(2)}$ des Büschels; die Regelstrahlen r_1 und r_2 derselben, die durch den Punkt gehen, treffen $R^{(4)}$ in je zwei Punkten, also $\mathfrak{R}^{(4)}$ in zwei Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$.

Auf $R^{(4)}$ seien P_1 und P_2 zwei beliebige, aber feste Punkte; alle Sehnen von $R^{(4)}$, welche der Geraden P_1P_2 begegnen, bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloids $\varphi^{(2)}$, welches dem Büschel angehört (*R.* Seite 150). Ist XY eine solche Sehne, so liegt sie mit P_1P_2 in einer Ebene ε; diese schneidet das Hyperboloid $\varphi_p^{(2)}$ in einem Kegelschnitte $K^{(2)}$, welcher jedem der Strahlen r_1r_2 begegnet. Der Kegelschnitt $K^{(2)}$ und der Punkt P bestimmen einen Kegel $\varkappa^{(2)}$, die Sehne XY und der Punkt P eine Ebene $\varkappa$. Wenn XY die Regelschaar durchläuft, so durchläuft $\varkappa^{(2)}$ ein Kegelbüschel mit den Grundstrahlen r_1r_2, PP_1, PP_2 und die Ebene $\varkappa$ durchläuft ein projectivisches Ebenenbündel zweiter Ordnung, dessen Ebenen die Berührungsebenen von P an $\varphi^{(2)}$ sind.

Von P aus wird $R^{(4)}$ durch einen Kegel $\varkappa^{(4)}$ vierter Ordnung mit den beiden Doppelkanten r_1 und r_2 projicirt. Er wird durch das Kegelbüschel (r_1, r_2, PP_1, PP_2) und das ihm projectivische Ebenenbüschel zweiter Ordnung erzeugt; durch Projection ergiebt sich, da $P_1 P_2$ beliebige Punkte der Raumcurve $R^{(4)}$ sind:

Legt man durch die Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ und zwei feste Punkte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ die Kegelschnitte eines Büschels, so schneiden sie $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch in je zwei Punkten $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, deren Verbindungslinie einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$ einhüllt. Dieser berührt $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten.

Der letzte Theil des Satzes ergiebt sich auf folgende Art. Das Ebenenbüschel zweiter Ordnung umhüllt den Berührungskegel durch P an die Fläche $\varphi^{(2)}$; dieser Kegel berührt $\varphi^{(2)}$ in einem Kegelschnitte, welcher $R^{(4)}$ in vier Punkten schneidet; ihre Projectionen sind die Berührungspunkte von $\mathfrak{K}^{(2)}$ mit $\mathfrak{R}^{(4)}$.

2. Auf $\varphi^{(2)}$ denke man sich einen beliebigen Regelstrahl derjenigen Schaar, welcher $P_1 P_2$ angehört; er schneidet alle Sehnen XY und mag die Raumcurve $R^{(4)}$ in $P_3 P_4$ schneiden. Es lässt sich dann der Kegel $\varkappa^{(4)} = (P, R^{(4)})$ durch das Kegelbüschel (r_1, r_2, PP_3, PP_4) und dasselbe Ebenenbüschel zweiter Ordnung $P(\varkappa \ldots)$ erzeugen, also auch durch die beiden Kegelbüschel (r_1, r_2, PP_1, PP_2) und (r_1, r_2, PP_3, PP_4), von denen je zwei Kegel sich auf einer Ebene $\varkappa$ schneiden. Es folgt:

Ist $\varphi_p^{(2)}$ die durch einen beliebigen Punkt P gehende Fläche des Büschels $\varphi^{(2)} \ldots$, sind $r_1 r_2$ die durch P gehenden Regelstrahlen dieser Fläche, sind p_1 und p_2 irgend zwei Regelstrahlen derselben Schaar einer beliebigen Fläche des Büschels, welche die Grundcurve $R^{(4)}$ desselben in den Punkten $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ schneiden, so schneiden sich die Kegel der beiden Büschel (r_1, r_2, PP_1, PP_2) und (r_1, r_2, PP_3, PP_4) in je zwei Strahlen des Kegels $\varkappa^{(4)} = (P, R^{(4)})$; die Verbindungsebenen dieser Strahlenpaare umhüllen einen Kegel, den Berührungskegel derjenigen Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels, auf welcher p_1 und p_2 liegen.

Durch Projection auf die Ebene η erhält man den Satz:

Legt man durch die Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ und irgend zwei Punkte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{R}^{(4)}$ einen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ in $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ trifft, darauf durch $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ und einen Punkt $\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{R}^{(4)}$ einen anderen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch in $\mathfrak{P}_4$ schneidet, so begegnen sich die Kegelschnitte der beiden Büschel $(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$ und $(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4)$ paarweise in je zwei Punkten von $\mathfrak{R}^{(4)}$; die Verbindungslinien dieser Punkte umhüllen einen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten berührt.

3. Es giebt nach dem Vorigen vier Flächen $\varphi_1^{(2)} \dots \varphi_4^{(2)}$ des Büschels $\varphi^{(2)} \dots$, deren Regelstrahlen in solche projectivischen Involutionen geordnet werden können, dass je zwei entsprechende Paare sich in vier Punkten von $R^{(4)}$ treffen. Wenn P auf einer solchen Fläche liegt, so werden die Involutionen dieser Schaaren aus r_1 und r_2 durch zwei projectivische Ebeneninvolutionen projicirt, welche den Kegel $\varkappa^{(4)} = (P, R^{(4)})$ erzeugen. Es folgt:

Wenn der Kegel $\varkappa^{(4)}$, welcher die Grundcurve $R^{(4)}$ eines Flächenbüschels $\varphi^{(2)}$ aus einem Punkte P projicirt, durch zwei projectivische Ebeneninvolutionen, deren Axen die beiden Doppelstrahlen des Kegels sind, erzeugt ist, so liegt P auf einer von vier bestimmten Flächen des Büschels.

4. Ist P ein Punkt einer der vier Flächen $\varphi_1^{(2)} \dots \varphi_4^{(2)}$, so werden die Strahleninvolutionen der beiden Regelschaaren auf einer von ihnen, z. B. $\varphi_1^{(2)}$, welche $R^{(4)}$ erzeugen, aus P durch zwei projectivische Ebeneninvolutionen auf den Berührungskegel $\pi^{(2)}$ durch P an $\varphi_1^{(2)}$ projicirt. Auf der Bildebene η ist der Durchschnitt mit letzterem ein Kegelschnitt $\mathfrak{F}_1^{(2)}$, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten berührt; die Durchschnitte mit den projectivischen involutorischen Tangentialebenen sind projectivische Tangenteninvolutionen auf $\mathfrak{F}_1^{(2)}$, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ erzeugen.

Der Berührungskegel von P an $\varphi_1^{(2)}$ berühre diese Fläche im Kegelschnitte $F_1^{(2)}$; derselbe schneidet $R^{(4)}$ in vier Punkten $ABCD$. Die Berührungsebene des Kegels $\pi^{(2)}$ längs der Geraden PA muss zwei entsprechende Regelstrahlen der beiden projectivischen Involutionen enthalten, nämlich die beiden, welche sich in A schneiden. In den Projectionen $\mathfrak{ABCD}$ von $ABCD$ berühren sich $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ und in $\mathfrak{A}$, sowie in den übrigen Punkten $\mathfrak{BCD}$, fallen in der gemeinschaftlichen Tangente zwei entsprechende Strahlen der beiden Tangenteninvolutionen zusammen:

Für jede Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten giebt es vier Kegelschnitte, welche dieselbe in vier Punkten berühren, von der Eigenschaft, dass auf jedem zwei projectivische Tangenteninvolutionen liegen, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ erzeugen. — In den gemeinschaftlichen Tangenten der vier Berührungspunkte fallen je zwei entsprechende Tangenten der Involutionen zusammen; je zwei Doppelstrahlen der Involutionen entsprechen einander und schneiden sich in den Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$.

5. Es seien nun $\varphi_5^{(2)}$ und $\varphi_6^{(2)}$ zwei solche Flächen des Büschels, auf denen man die Regelstrahlen je einer Regelschaar in solche Involutionen ordnen kann, dass sich die Strahlenpaare derselben auf $R^{(4)}$ schneiden. Die

Projectionen derselben bilden zwei projectivische Tangenteninvolutionen auf zwei Kegelschnitten $\mathfrak{F}_5^{(2)}$ und $\mathfrak{F}_6^{(2)}$, von denen jeder $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten berührt. Je zwei entsprechende Paare der Involutionen schneiden sich in vier Punkten von $\mathfrak{R}^{(4)}$.

Durch P lassen sich an $\varphi_5^{(2)}$ und $\varphi_6^{(2)}$ vier gemeinschaftliche Berührungsebenen legen, eine von ihnen sei β. Sie schneide die involutorische Regelschaar auf $\varphi_5^{(2)}$ in r_5 und die auf $\varphi_6^{(2)}$ in r_6 und berühre $R^{(4)}$ in E; es müssen sich dann r_5 und r_6 in E schneiden. Die Projectionen $\mathfrak{r}_5$ und $\mathfrak{r}_6$ auf die Ebene η müssen in eine gemeinschaftliche Tangente der Kegelschnitte $\mathfrak{F}_5^{(2)}$ und $\mathfrak{F}_6^{(2)}$ zusammenfallen, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ in der Projection $\mathfrak{E}$ von E berührt:

Die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ lässt sich auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische Tangenteninvolutionen auf zwei Kegelschnitten erzeugen, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ in je vier Punkten berühren. Jede gemeinschaftliche Tangente entspricht sich in der projectivischen Beziehung selbst und berührt $\mathfrak{R}^{(4)}$.

Wählt man an Stelle der beliebig gewählten Fläche $\varphi_5^{(2)}$ die Fläche $\varphi_p^{(2)}$, so geht der Kegelschnitt $\mathfrak{F}_5^{(2)}$ in einen der Doppelpunkte über:

Die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ lässt sich auf drei verschiedene Arten durch eine Strahleninvolution, deren Scheitel ein Doppelpunkt ist, und durch eine Tangenteninvolution auf einem Kegelschnitte erzeugen, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten berührt; die Tangenten vom Doppelpunkte an diesen Kegelschnitt sind die Tangenten im Doppelpunkte an $\mathfrak{R}^{(4)}$.

Die Doppelpunktstangenten sind die gemeinschaftlichen homologen Doppeltangenten beider Involutionen.

6. Zu einer anderen Erzeugung der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ gelangt man auf folgendem Wege.

Auf der Fläche $\varphi_p^{(2)}$, welche durch P geht, sei g_1 ein Strahl derjenigen Regelschaar, zu welcher r_1 gehört; er begegne der Raumcurve $R^{(4)}$ in den Punkten $P_5 P_6$ und muss auch r_2 treffen, weil r_2 der anderen Regelschaar angehört. Es seien $P_1 P_2 P_3 P_4$ vier feste Punkte von $R^{(4)}$. Durch dieselben und die Gerade g_1 giebt es unendlich viele Hyperboloide, welche ein Bündel bilden und daher $\varphi_p^{(2)}$ in einem Bündel von Raumcurven dritter Ordnung schneiden. Eine von ihnen geht durch die Punkte P_5 und P_6, sie sei $R^{(3)}$. Da diese Raumcurve auf $\varphi_p^{(2)}$ liegt und den Regelstrahl g_1 in zwei Punkten schneidet, so trifft sie r_1, welcher mit g_1 zu derselben Regelschaar gehört, auch in zwei Punkten, r_2 aber nur in einem Punkte.

Die Projection $\mathfrak{R}^{(3)}$ von $R^{(3)}$ ist eine ebene Curve dritter Ordnung, welche $\mathfrak{R}_1$ als Doppelpunkt und $\mathfrak{R}_2$ als einfachen Punkt hat und ausserdem durch die Projectionen $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_6$ der Punkte $P_1 \dots P_6$ geht. Von diesen sechs Punkten liegen $\mathfrak{P}_5 \mathfrak{P}_6$ mit $\mathfrak{R}_2$ in einer Geraden, der Projection $\mathfrak{g}_1$ von g_1.

Wenn g_1 die eine Regelschaar von $\varphi_p^{(2)}$ durchläuft, so ändern sich $\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_6$ auf $\mathfrak{R}^{(4)}$, aber so, dass sie stets mit den festen Punkten $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4 \mathfrak{R}_2$ auf einer Curve $\mathfrak{R}^{(3)}$ dritter Ordnung, die $\mathfrak{R}_1$ zum Doppelpunkte hat, liegen und mit $\mathfrak{R}_2$ auf einer Geraden sich befinden.

Legt man durch vier feste Punkte einer ebenen Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierter Ordnung, welche zwei Doppelpunkte hat, Curven dritter Ordnung, welche durch den einen Doppelpunkt gehen und den anderen selbst zum Doppelpunkte haben, so schneiden sie $\mathfrak{R}^{(4)}$ in zwei Punkten, deren Verbindungslinien sich im ersten Doppelpunkte treffen.

7. Auf der Fläche $\varphi^{(2)}$ liegen zwei Raumcurven $R^{(4)}$ und $R_1^{(4)}$ vierter Ordnung, die sich in den acht Punkten $A_1 \dots A_8$ treffen. Von einem beliebigen Punkte P projicirt man $R^{(4)}$ auf $\varphi^{(2)}$; die Projection ist eine Raumcurve $R_2^{(4)}$ vierter Ordnung. Denn ist π die Polarebene von P in Bezug auf $\varphi^{(2)}$, so sind $R^{(4)}$ und $R_2^{(4)}$ collineare Curven in zwei perspectivisch liegenden collinearen Systemen mit dem Collineationscentrum P und der Collineationsebene π. Die Curven $R_1^{(4)}$ und $R_2^{(4)}$ schneiden sich in acht Punkten $B_1 \dots B_8$, und die Geraden, welche diese mit P verbinden, müssen der Curve $R^{(4)}$ begegnen:

Wenn zwei Raumcurven vierter Ordnung sich in acht Punkten schneiden, so giebt es durch einen beliebigen Punkt P acht Gerade, welche beiden Raumcurven begegnen.

Durch Projection:

Die ebenen Curven $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(4)}$ vierter Ordnung, welche die Projectionen zweier Raumcurven $R^{(4)}$ und $R_1^{(4)}$ vierter Ordnung sind, welche auf derselben Fläche zweiter Ordnung liegen, schneiden sich in sechzehn Punkten.

8. Die Raumcurven $R^{(4)}$ und $R_1^{(4)}$ auf $\varphi^{(2)}$ schneiden sich in acht associirten Punkten $A_1 \dots A_8$; ein hindurchgehender Kegel $\alpha^{(2)}$ habe den Scheitel P. Es bilden $A_1 \dots A_8$ die Grundpunkte eines Flächenbündels $[\mathfrak{B}]$, ihre Projectionen $A_1' \dots A_8'$ auf $\varphi^{(2)}$ diejenigen eines neuen Flächenbündels $[\mathfrak{B}']$; beide haben das durch die Flächen $\varphi^{(2)}$ und $\alpha^{(2)}$ bestimmte Büschel gemein und gehören daher einem Gebüsch an, zu dem auch die sämmtlichen durch $A_1 \dots A_8$ sowie $A_1' \dots A_8'$ gehenden Raumcurven vierter Ordnung gehören, also

auch die Projectionen $R_2^{(4)}$ und $R_3^{(4)}$ von $R^{(4)}$ und $R_1^{(4)}$ auf $\varphi^{(2)}$. Daher bilden die acht Schnittpunkte $B_1 \dots B_8$ von $R_1^{(4)}$ und $R_2^{(4)}$ eine neue Gruppe associirter Punkte des Gebüsches. Ihre Projectionen von P aus auf $\varphi^{(2)}$ seien $B_1' \dots B_8'$; sie sind die Durchschnitte von $R_3^{(4)}$ und $R^{(4)}$, bilden deshalb auch eine Gruppe associirter Punkte des Gebüsches und liegen mithin mit $B_1 \dots B_8$ auf einer Raumcurve $B^{(4)}$ vierter Ordnung, welche ganz auf $\varphi^{(2)}$ verläuft. Denkt man sich durch die fünf Strahlen $P(B_1 \dots B_5)$ einen Kegel $\beta^{(2)}$ gelegt, so hat derselbe mit dieser Raumcurve zehn Punkte $B_1 \dots B_5 B_1' \dots B_5'$ gemein; dieselbe liegt also vollständig auf ihm, und er geht daher auch durch $B_6 B_7 B_8$; folglich gilt der Satz:

Projicirt man aus einem Punkte P eine Raumcurve $R^{(4)}$ einer Fläche $\varphi^{(2)}$ auf diese Fläche, so erhält man eine neue Raumcurve $R_2^{(4)}$; legt man dann durch P als Scheitel einen Kegel $\alpha^{(2)}$, welcher $R^{(4)}$ in acht Punkten $A_1 \dots A_8$ schneidet, und durch diese auf $\varphi^{(2)}$ eine Raumcurve $R_1^{(4)}$, welche der Raumcurve $R_2^{(4)}$ in acht Punkten $B_1 \dots B_8$ begegnet, so liegen deren Verbindungsstrahlen mit P auf einem Kegel $\beta^{(2)}$.

Durch Projection der Figur von P aus auf eine Ebene folgt der Satz:

Liegen von den sechzehn Schnittpunkten zweier ebenen Curven $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(4)}$ mit je zwei Doppelpunkten acht auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$, so liegen die anderen acht auch auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{B}^{(2)}$.

9. Von P aus denke man sich an eine der Flächen $\varphi^{(2)}$ des Büschels, welche die Raumcurve $R^{(4)}$ zur Knotenlinie haben, den Berührungskegel $\varkappa^{(2)}$ gelegt, welcher diese im Kegelschnitte $K^{(2)}$ berühren mag. Er schneidet die Projectionsebene η in einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}^{(2)}$, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier Punkten berühren muss. Die Polarebene π von P in Bezug auf $\varphi^{(2)}$ schneidet $R^{(4)}$ in vier Punkten $A_1 \dots A_4$, in deren Projectionen sich $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ berühren.

Es wird nun irgend ein Strahl s des Punktes P von zwei Flächen des Büschels berührt; durch seinen Durchschnitt $\mathfrak{S}$ mit η giebt es also zwei vierfach berührende Kegelschnitte:

Es giebt unendlich viele vierfach berührende Kegelschnitte der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ und zwar durch jeden Punkt zwei. Sie bilden *das erste System* von Berührungskegelschnitten der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$.

Da die Ebenen aller Kegelschnitte $K^{(2)}$ sich in einer Geraden p schneiden, der conjugirten Geraden von P in Bezug auf das Flächenbüschel, und auf dieser eine Involution bestimmen, die Projection von p aber die

Verbindungslinie der Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ ist (denn p muss in der Berührungsebene $[r_1r_2]$ an $\varphi^{(2)}$ liegen), so folgt:

Alle vierfach berührenden Kegelschnitte von $\mathfrak{R}^{(4)}$ schneiden die Verbindungslinie der Doppelpunkte in einer Involution. Die Doppelpunkte der Curve sind auch die Doppelpunkte der Involution.

Unter den Flächen des Büschels giebt es vier Kegel; die Polarebene von P in Bezug auf einen dieser Kegel schneidet denselben in zwei Kegelstrahlen, deren Projectionen zwei Doppeltangenten von $\mathfrak{R}^{(4)}$ sind:

Unter den vierfach berührenden Kegelschnitten giebt es vier, welche in Geradenpaare zerfallen; diese bilden die acht Doppeltangenten der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$.

10. Es seien $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$ zwei beliebige Flächen des Büschels, π_1 und π_2 die Polarebenen des Punktes P in Bezug auf dieselben. Sie mögen die Raumcurve $R^{(4)}$ in den Punkten $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ schneiden. Wählt man die so erhaltenen acht Punkte als Grundpunkte eines Flächenbündels, so gehört zu den Flächen desselben auch das Ebenenpaar $(\pi_1\pi_2)$, dessen Schnittlinie p sein mag.

Durch p und einen beliebigen Punkt Q ist eine Ebene ε bestimmt; auf p seien R und S zwei beliebige Punkte. Die Polarebenen der drei Punkte Q, R, S in Bezug auf das Bündel bilden drei collineare Bündel mit den Scheiteln Q', P und P; diese erzeugen also einen Kegel dritter Ordnung $\varkappa^{(3)}$ mit dem Scheitel P. Es ist somit der Ort der Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf die Flächen des Bündels ein Kegel $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung mit dem Scheitel P, und daher ist P der Pol einer beliebigen Ebene in Bezug auf eine bestimmte Fläche des Bündels (cf. *Schroeter* Th. d. O. Seite 711 und 712), die natürlich ein Kegel mit dem Scheitel P sein muss:

Die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf zwei Flächen eines Büschels schneiden die Knotenlinie desselben in acht Punkten, durch welche sich von P aus ein Kegel zweiter Ordnung legen lässt.

Dieser Kegel schneidet $\mathfrak{R}^{(4)}$ in den Projectionen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$ der Schnittpunktgruppen $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$, also in den acht Punkten, in welchen zwei Kegelschnitte die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ berühren:

Wenn zwei Kegelschnitte die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierfach berühren, so liegen die acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte.

Wenn man von P aus an diejenige Fläche des Büschels durch $R^{(4)}$, auf welcher P liegt, die Berührungsebene legt, so schneidet sie dieselbe in

den beiden Regelstrahlen r_1 und r_2, welche die Projectionsebene η in den beiden Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ treffen. Diese bilden daher zusammen einen vierfach berührenden Kegelschnitt und liegen mit den vier Berührungspunkten irgend eines solchen auf einem Kegelschnitte:

Die vier Berührungspunkte irgend eines vierfach berührenden Kegelschnittes liegen mit den beiden Doppelpunkten auf einem Kegelschnitte.

Sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$ zwei Gruppen von Berührungspunkten, so schneiden sich die durch sie gelegten Kegelschnittbüschel in je vier Berührungspunkten vierfach berührender Kegelschnitte und sind dadurch projectivisch auf einander bezogen. *Diejenigen Kegelschnitte der Büschel, welche durch die Doppelpunkte gehen, berühren sich in diesen doppelt.*

Die Polarebene π des Punktes P in Bezug auf eine Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels schneidet dasselbe in einem Kegelschnittbüschel, zu dem auch der Kegelschnitt $F^{(2)}$ gehört, in dem $\varphi^{(2)}$ von π geschnitten wird. Projicirt man dieses Büschel auf die Ebene η, so erhält man in derselben ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte diejenigen vier Punkte sind, in denen die Projection $\mathfrak{F}^{(2)}$ von $F^{(2)}$ die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ berührt. — Dreht sich nun π um p, so durchläuft dieses Kegelschnittbüschel ein Netz. In demselben giebt es ein Büschel, dessen Kegelschnitte sich in den Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ berühren. Die Tripelcurve des Netzes zerfällt daher in die Verbindungslinie $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ und einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^{(2)}$, der aber nicht durch die Doppelpunkte hindurchgeht. Er schneidet $\mathfrak{R}^{(4)}$ in acht Punkten, in denen also acht Kegelschnitte des ersten Systems die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier auf einander folgenden Punkten berühren.

Hieraus ergiebt sich für die Raumcurve $R^{(4)}$ eine andere Eigenschaft. Die Polarebenen π von P schneiden $R^{(4)}$ in je vier Punkten. Die Schnittpunkte der Gegenseiten des von ihnen gebildeten vollständigen Vierecks werden eine Raumcurve erfüllen, die auf demjenigen Kegel durch P verläuft, welcher die Tripelcurve $\mathfrak{K}^{(2)}$ zur Basis hat: da auf jeder Ebene π drei solche Punkte liegen, so ist diese Raumcurve von der dritten Ordnung:

Die Polarebenen π von P bezüglich der Flächen $\varphi^{(2)}$ von der Grundcurve $R^{(4)}$ schneiden diese in solchen Kegelschnittbüscheln, dass die Scheitel der in ihnen vorkommenden Geradenpaare auf einer Raumcurve dritter Ordnung liegen. Ihre Projection ist die Jacobische Curve der Projection $\mathfrak{R}^{(4)}$ von $R^{(4)}$.

11. Zieht man in einem Punkte C_1 der Raumcurve $R^{(4)}$ die Tangente

c_1 an dieselbe, so lassen sich vier Tangenten $d_1 d_2 d_3 d_4$ construiren, welche c_1 treffen. Man schneide dann die Fläche $\varphi_p^{(2)}$ des Büschels, welche durch P geht, mit den Ebenen $[c_1 d_1]$, $[c_1 d_2]$, $[c_1 d_3]$, $[c_1 d_4]$ in den vier Kegelschnitten $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, $D_3^{(2)}$, $D_4^{(2)}$, so müssen diese den Regelstrahlen $r_1 r_2$ des Punktes P, welche auf $\varphi_p^{(2)}$ liegen, begegnen und die Curve $R^{(4)}$ in den Punktpaaren $C_1 D_1$, $C_1 D_2$, $C_1 D_3$, $C_1 D_4$ doppelt berühren:

Auf jeder Fläche eines Büschels giebt es vier Kegelschnitte, welche die Knotenlinie desselben doppelt so berühren, dass sie einen Berührungspunkt gemein haben.

Die Projection der Figur auf eine Ebene giebt den Satz:

Durch die Doppelpunkte der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ lassen sich vier Kegelschnitte legen, welche diese in einem bestimmten Punkte und noch in je einem anderen berühren. — Alle Kegelschnitte durch die Doppelpunkte von $\mathfrak{R}^{(4)}$, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch doppelt berühren, bilden ***das zweite System*** der Berührungskegelschnitte der Curve.

Es giebt je vier Tangenten der Raumcurve $R^{(4)}$, welche einer Secante derselben begegnen. — Das Hyperboloid $\varphi_p^{(2)}$ enthält alle Secanten von $R^{(4)}$, welche die Regelstrahlen r_1 und r_2 schneiden, also auch die acht Tangenten $c_1 d_1 e_1 f_1 c_2 d_2 e_2 f_2$, da diese zu den Secanten von $R^{(4)}$ gehören. Es folgt:

Die acht Tangenten von $R^{(4)}$, welche den Regelstrahlen $r_1 r_2$ der Fläche $\varphi_p^{(2)}$ begegnen, sind selbst Regelstrahlen dieser Fläche.

Wie in V. 7. beweist man:

Von jedem Doppelpunkte der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ lassen sich vier Tangenten an dieselbe ziehen; die von ihnen gebildeten Büschel sind projectivisch.

12. Dieser Satz ist nur ein specieller Fall eines allgemeineren, der sich auch aus dem vorigen ableiten lässt. — Man setze voraus, dass c_1 eine ganz beliebige Tangente von $R^{(4)}$ sei; die vier Tangenten dieser Curve, welche c_1 schneiden, seien $c_2 d_2 e_2 f_2$. Sie liegen auf demjenigen Hyperboloide $\varphi_1^{(2)}$ durch $R^{(4)}$, welches durch c_1 und $R^{(4)}$ hindurchgeht. Auf demselben liegen noch drei Tangenten $d_1 e_1 f_1$ der Curve $R^{(4)}$. Die Ebenenbüschel, welche die acht Tangenten mit den Kegelscheiteln $S_1 \ldots S_4$ verbinden, sind projectivisch. Nimmt man nun an, dass die Ebenen, welche c_1 bezüglich c_2 mit diesen Scheiteln verbinden, der Reihe nach durch die Tangenten $c_2 d_2 e_2 f_2$ bezüglich $c_1 d_1 e_1 f_1$ gehen, so ist $c_1(c_2 d_2 e_2 f_2) \barwedge c_2(c_1 d_1 e_1 f_1)$, und es folgt:

Auf der Raumcurve $R^{(4)}$ giebt es unendlich viele Paare von Gruppen

aus je vier Tangenten von demselben Doppelverhältnisse. Acht Tangenten, welche aus zwei solchen Gruppen bestehen, liegen jedesmal auf einer Fläche $\varphi_1^{(2)}$ des Büschels, dessen Grundcurve $R^{(4)}$ ist, und schneiden daher jede Ebene in acht Punkten eines Kegelschnittes.

Projicirt man die Figur aus P auf die Ebene η, so erhält man als Projection von $\varphi_1^{(2)}$, auf welcher Fläche die acht Tangenten liegen, die Tangenten eines Kegelschnittes $\mathfrak{F}_1^{(2)}$, welcher $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierfach berührt. Die Projectionen der Tangenten $c_1 d_1 e_1 f_1 c_2 d_2 e_2 f_2$ sind gleichzeitig Tangenten von $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{F}_1^{(2)}$, also:

Die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ und ein vierfach berührender Kegelschnitt haben ausser den Tangenten in den Berührungspunkten noch acht gemeinschaftliche Tangenten. Sie theilen sich in zwei Gruppen von gleichen Doppelverhältnissen.

Ordnet man auf dem Hyperboloid $\varphi_1^{(2)}$ die Tangentenpaare $c_1 c_2$, $d_1 d_2$, $e_1 e_2$, $f_1 f_2$ einander zu, so sind dadurch die beiden Regelschaaren desselben projectivisch auf einander bezogen. Die Ebene ε durch die Punkte $(c_1 c_2)$, $(d_1 d_2)$, $(e_1 e_2)$ schneidet $\varphi_1^{(2)}$ in einem Kegelschnitte $E^{(2)}$, auf dem sich je zwei entsprechende Regelstrahlen schneiden müssen.

Die Projection von $E^{(2)}$ auf η aus P sei $\mathfrak{E}^{(2)}$, so dass sich also auf $\mathfrak{E}^{(2)}$ die Tangentenpaare $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$, welche der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ und dem vierfach berührenden Kegelschnitte $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ gemeinsam sind, schneiden. Letzterer ist der Durchschnitt des Berührungskegels $\pi^{(2)}$ von P an $\varphi_1^{(2)}$ mit η und muss also $\mathfrak{E}^{(2)}$ doppelt berühren in den Projectionen derjenigen beiden Punkte, in denen sich $E^{(2)}$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ treffen, in welchem $\pi^{(2)}$ das Hyperboloid $\varphi_1^{(2)}$ berührt.

Somit lässt sich durch die Schnittpunkte der Tangenten $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{E}^{(2)}$ legen, welcher $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ doppelt berührt. — Solche $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ doppelt berührenden Kegelschnitte lassen sich aber auch durch die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_2),\quad (\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_2),\quad (\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_2),\quad (\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_2),$$
$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_2),\quad (\mathfrak{e}_1\mathfrak{c}_2),\quad (\mathfrak{f}_1\mathfrak{d}_2),\quad (\mathfrak{d}_1\mathfrak{f}_2),$$
$$(\mathfrak{c}_1\mathfrak{f}_2),\quad (\mathfrak{f}_1\mathfrak{c}_2),\quad (\mathfrak{d}_1\mathfrak{e}_2),\quad (\mathfrak{e}_1\mathfrak{d}_2)$$

legen. Dadurch erhält der vorige Satz die folgende Fassung:

Die acht gemeinschaftlichen Tangenten der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ und eines vierfach berührenden Kegelschnittes $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ schneiden sich viermal in vier solchen Punkten, dass sich durch dieselben ein Kegelschnitt legen lässt, welcher $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ doppelt berührt.

13. Es bleibt zu untersuchen, wodurch diese beiden Gruppen bedingt werden.

Die Ebene $[c_1 d_2]$ schneidet die Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels, auf welcher P liegt, in einem Kegelschnitte $K^{(2)}$, dessen Projection $\mathfrak{K}^{(2)}$ auf η zu denjenigen Kegelschnitten gehört, welche durch die Doppelpunkte gehen und $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch in zwei Punkten berühren. Diese Berührungspunkte sind die Projectionen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ derjenigen Punkte, in denen c_1 und d_2 die Raumcurve $R^{(4)}$ berühren.

Sind nun $C_1 D_1 E_1 F_1 C_2 D_2 E_2 F_2$ die Berührungspunkte der Tangenten $c_1 d_1 e_1 f_1 c_2 d_2 e_2 f_2$, sind ferner $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{F}_2$ ihre Projectionen, so berühren die Tangenten $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1 \mathfrak{e}_1 \mathfrak{f}_1 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{f}_2$ der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ in ihnen den vierfach berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{F}_1^{(2)}$.

Durch die Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ von $\mathfrak{R}^{(4)}$ lassen sich vier Kegelschnitte legen, welche letztere in $\mathfrak{C}_1$ und ausserdem noch in $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{F}_2$ berühren; ebenso lassen sich durch die Doppelpunkte je vier Kegelschnitte legen, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ je in $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{F}_1$ und ausserdem in $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{F}_2$ berühren.

Durch einen beliebig angenommenen Punkt $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{R}^{(4)}$ sind also die vier Punkte $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{F}_2$ und durch jeden von diesen sind die vier Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{F}_1$ bestimmt.

Die Berührungskegelschnitte des zweiten Systems ordnen die Punkte von $\mathfrak{R}^{(4)}$ in entsprechende vierpunktige Gruppen. Die Tangenten in ihnen berühren einen Kegelschnitt des ersten Systems.

Die durch die acht Punkte $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{F}_2$ bestimmten acht Kegelschnitte des zweiten Systems ordnen sich zu acht projectivischen Büscheln

$$(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1)|\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{F}_2| \;\overline{\wedge}\; (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_1)|\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{F}_2| \;\overline{\wedge} \cdots$$
$$\overline{\wedge}\; (\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_2)|\mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{F}_1| \;\overline{\wedge} \cdots .$$

Durch die Zuordnung der vier Kegelschnittpaare in den beiden ersten Büscheln sind die letzteren projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Curve vierter Ordnung, welche $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zu Doppelpunkten hat, $\mathfrak{R}^{(4)}$ in $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ berührt und mit ihr noch die vier Punkte $\mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{F}_2$ gemein hat. Sie fällt demnach mit $\mathfrak{R}^{(4)}$ zusammen. Die Kegelschnitte des Büschels $(\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_1)$ schneiden $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt berühren, welcher die Tangenten $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ berührt und daher mit $\mathfrak{F}_1^{(2)}$ zusammenfällt:

Legt man durch die Doppelpunkte von $\mathfrak{R}^{(4)}$ die Kegelschnitte eines

Büschels, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ noch in einem festen Punkte $\mathfrak{C}_1$ berühren, so schneiden sie die Curve noch in je zwei Punkten, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt des ersten Systems umhüllen. Dieser beschreibt das ganze System, falls $\mathfrak{C}_1$ die Curve durchläuft.

Dieser Satz ergiebt sich übrigens als specieller Fall aus dem Satze auf Seite 299. — (Siehe auch: *Milinowski*, Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven vierter Ordnung. Zeitschrift für Mathematik und Physik. XXIII. 2.)

14. Die conjugirte Gerade p von P in Bezug auf das Flächenbüschel wird von acht Tangenten der Raumcurve $R^{(4)}$ geschnitten. Diese Tangenten seien $p_1 \dots p_8$ und mögen in $P_1 \dots P_8$ berühren.

Schneidet man mit der Ebene $\pi_1 = [pp_1]$ die Fläche $\varphi^{(2)}$ des Büschels, auf welcher P liegt, in dem Kegelschnitte $P_1^{(2)}$, so berührt dieser die Raumcurve in P_1, hat mit ihr also nur noch zwei Punkte gemein. Die Fläche π_1 geht aber durch p und ist daher eine Polarebene von P, folglich gehört die Projection $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ des Kegelschnittes $P_1^{(2)}$ zu den vierfach berührenden Kegelschnitten der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$. Zwei der Berührungspunkte fallen aber in einen zusammen, in die Projection $\mathfrak{P}_1$ von P_1, in welchem also $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ mit der Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vier auf einander folgende Punkte gemein hat. Somit ergiebt sich:

In dem ersten System von Berührungskegelschnitten giebt es acht, welche die Curve in vier auf einander folgenden Punkten berühren.

VIII. *Polareigenschaften von $\mathfrak{R}^{(4)}$.*

1. Durch den Punkt P sei a eine beliebige Gerade, welche die Bildebene η in $\mathfrak{A}$ schneiden mag; das Polarhyperboloid von a in Bezug auf das Büschel $\varphi^{(2)} \dots$ sei $\alpha^{(2)}$. Dasselbe wird von der Raumcurve $R^{(4)}$ in acht associirten Punkten $A_1 \dots A_8$ geschnitten; die Tangenten in ihnen an $R^{(4)}$ begegnen der Geraden a. Die Projectionen dieser Tangenten sind die Tangenten der ebenen Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ in den Projectionen $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_8$.

Durch die acht associirten Punkte $A_1 \dots A_8$ lassen sich auf der durch P gehenden Fläche $\varphi_p^{(2)}$ die Raumcurven $A^{(4)} \dots$ eines Büschels legen, von denen eine $A^{(4)}$ durch P geht. Die Projectionen dieser Raumcurven sind ebene Curven $\mathfrak{A}^{(4)} \dots$ vierter Ordnung, welche mit $\mathfrak{R}^{(4)}$ dieselben Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2$ haben und sich in den Punkten $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_8$ schneiden, den Berührungspunkten der Tangenten von $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{R}^{(4)}$. Eine dieser Projectionen ist eine ebene Curve $\mathfrak{A}^{(3)}$ dritter Ordnung, nämlich die Projection derjenigen Curve $A^{(4)}$, welche

durch P geht. Auch sie enthält als einfache Punkte die Doppelpunkte $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$. Somit hat sich ergeben:

Von einem Punkte $\mathfrak{A}$ lassen sich an eine ebene Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ acht Tangenten ziehen; durch die Berührungspunkte lässt sich ein Büschel von Curven vierter Ordnung legen, welche mit $\mathfrak{R}^{(4)}$ dieselben Doppelpunkte haben; eine von ihnen degenerirt in die Gerade $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ und eine Curve $\mathfrak{A}^{(3)}$ dritter Ordnung. Diese heisst die erste Polare von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{R}^{(4)}$.

2. Man denke sich durch a eine beliebige Ebene α gelegt; in ihr drehe sich a um P. Das Polarhyperboloid $\alpha^{(2)}$ durchläuft ein Büschel, dessen Knotenlinie aus der conjugirten Geraden p von P bezüglich des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ und aus einer Raumcurve $A^{(3)}$ besteht, auf welcher die Pole von α bezüglich der Flächen $\varphi^{(2)}\dots$ liegen.

Jede Fläche $\alpha^{(2)}$ schneidet $R^{(4)}$ in einer Gruppe $A_1\dots A_8$ von associirten Punkten; jede solche Gruppe lässt sich mit P durch eine Raumcurve $A^{(4)}$ verbinden, und alle diese Raumcurven bilden ein Büschel.

Dies ergiebt sich auf folgende Art. — Die Fläche $\varphi^{(2)}$, auf welcher $R^{(4)}$ liegt, wird von den Flächen $\alpha^{(2)}\dots$ in einem Büschel von Raumcurven $B^{(4)}\dots$ geschnitten, welche sich mit dem Punkte P durch ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung $\beta^{(2)}\dots$ verbinden lassen. Ordnet man je zwei Flächen der Büschel $\alpha^{(2)}\dots$ und $\beta^{(2)}\dots$, die sich in einer Raumcurve $B^{(4)}\dots$ schneiden, einander zu, so sind diese Büschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche vierter Ordnung. Letztere aber zerfällt in die Fläche $\varphi^{(2)}$ und eine andere Fläche $\psi^{(2)}$, welche durch die Grundcurven der Büschel $\alpha^{(2)}\dots$ und $\beta^{(2)}\dots$ gehen muss. Diese wird von den Flächen $\beta^{(2)}\dots$ in den Raumcurven $A^{(4)}\dots$ eines Büschels geschnitten.

Ihre Projectionen sind ebene Curven $\mathfrak{A}^{(3)}$ dritter Ordnung und zwar die ersten Polaren der Punkte $\mathfrak{A}$ auf der Geraden (α, η); dieselben bilden also auch ein Büschel, und es folgt:

Die ersten Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf die ebene Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ bilden ein Büschel.

3. Das Flächenbüschel $\varphi^{(2)}\dots$ werde von der Fläche $\varkappa^{(2)}$, welche durch P gehen mag, in dem Raumcurvenbüschel $F^{(4)}\dots$ geschnitten, dessen Grundpunkte $F_1\dots F_8$ auf $R^{(4)}$ liegen. Die Projectionen $\mathfrak{F}^{(4)}\dots$ der Curven $F^{(4)}\dots$ bilden ein Büschel von ebenen Curven vierter Ordnung, welche durch die Projectionen $\mathfrak{F}_1\dots\mathfrak{F}_8$ hindurchgehen und dieselben Doppelpunkte $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$

haben. Diese sind die Schnittpunkte der Ebene η mit den durch P gehenden Regelstrahlen der Fläche $\varkappa^{(2)}$.

Es sei wieder a eine beliebige Gerade durch P; ihre Polarhyperboloide $\alpha^{(2)}\dots$ bezüglich der Büschel $(\varkappa^{(2)}\varphi^{(2)})\dots$ bilden auch ein Büschel, dessen Knotenlinie aus der Polargeraden p von a bezüglich $\varkappa^{(2)}$ und einer Raumcurve $R^{(3)}$ dritter Ordnung besteht, dem Orte der conjugirten Punkte von a in Bezug auf das Flächenbündel $(\varkappa^{(2)}\varphi^{(2)}\dots)$.

Ist $\varphi^{(2)}$ eine beliebige Fläche des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ und $\alpha^{(2)}$ die Polarfläche von a bezüglich des von dieser Fläche $\varphi^{(2)}$ und $\varkappa^{(2)}$ gebildeten Büschels, so ordne man die Flächen $\varphi^{(2)}$ und $\alpha^{(2)}$ einander zu; dadurch sind die Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ und $\alpha^{(2)}\dots$ projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche $\varphi^{(4)}$ vierter Ordnung (*R.* Seite 244). Zwei homologe Flächen schneiden sich in einer Raumcurve $B^{(4)}$ vierter Ordnung. Legt man durch die so erhaltenen Raumcurven $B^{(4)}\dots$ und den Punkt P Flächen $\lambda^{(2)}$ zweiter Ordnung, so bilden auch diese ein Büschel, dessen Raumcurve $L^{(4)}$ auf $\varphi^{(4)}$ liegt (*R.* Seite 244).

$\varkappa^{(2)}$ und $\alpha^{(2)}$ schneiden sich in einer Raumcurve $A^{(4)}$, welche durch diejenigen acht Punkte $A_1\dots A_8$ von $F^{(4)}$ hindurchgeht, deren Verbindungsebenen mit a die Curve $F^{(4)}$ in diesen Punkten berühren. Durch diese Schnittpunkte muss also auch $B^{(4)}$ gehen. Alle Flächen $\lambda^{(2)}$ zweiter Ordnung, welche durch diese Curven $B^{(4)}$ und den Punkt P gelegt werden, bilden ein Büschel (*R.* Seite 244) und schneiden also $\varkappa^{(2)}$ in einem Büschel von Raumcurven $K^{(4)}$, welche durch die Gruppe $A_1\dots A_8$ gehen müssen. Die Projectionen $\mathfrak{K}^{(3)}$ bilden ein Büschel von ebenen Curven dritter Ordnung, welche die ersten Polaren von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf die Curven $\mathfrak{F}^{(4)}$ sind:

Die ersten Polaren eines Punktes in Bezug auf alle Curven $\mathfrak{F}^{(4)}$ vierter Ordnung eines Büschels mit zwei Doppelpunkten bilden selbst ein Büschel.

4. Ordnet man jeder Fläche $\varphi^{(2)}$ die durch sie entstandene Fläche $\lambda^{(2)}$ zu, so sind die Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ und $\lambda^{(2)}\dots$ projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche $\varphi^{(4)}$ vierter Ordnung, welche durch P geht und $\varkappa^{(2)}$ in einer Raumcurve $K^{(8)}$ achter Ordnung schneidet, welche auch durch P geht. Auf ihr liegen die Berührungspunkte der durch a an die Raumcurven $F^{(4)}\dots$ gelegten Berührungsebenen. Die Fläche $\varphi^{(4)}$ schneidet die Regelstrahlen r_1 und r_2 des Punktes P auf $\varkappa^{(2)}$ in P und noch in drei Punkten; dies thut daher auch $K^{(8)}$. Die Projection von $K^{(8)}$ ist eine Curve $\mathfrak{K}^{(7)}$ siebenter Ordnung, welche in $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei dreifache Punkte hat;

sie enthält die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich vom Punkte $\mathfrak{A} = (a, r_i)$ an die Curven $\mathfrak{F}^{(4)}\dots$ ziehen lassen. Man hat also den Doppelsatz:

Die Berührungspunkte der Berührungsebenen, welche sich durch eine Gerade an die Raumcurven vierter Ordnung eines Büschels legen lassen, liegen auf einer Raumcurve achter Ordnung

Die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von einem Punkte an die ebenen Curven vierter Ordnung eines Büschels mit zwei Doppelpunkten legen lassen, liegen auf einer Curve siebenter Ordnung, welche diese Doppelpunkte zu dreifachen Punkten hat.

5. Die Polarebenen $\pi\dots$ des Punktes P in Bezug auf die Flächen des Büschels $\varphi^{(2)}\dots$ bilden ein mit letzterem projectivisches Büschel, welches zur Axe die conjugirte Gerade p von P hat. Beide Büschel schneiden sich in einer Fläche $\varphi^{(3)}$ dritter Ordnung, die auch den Punkt P enthält. Zwischen den 27 Geraden der letzteren und den Doppeltangenten von $\mathfrak{R}^{(4)}$ findet ein einfacher Zusammenhang statt.

Zu den 27 Geraden von $\varphi^{(3)}$ gehören erstens p, r_1, r_2; dann weiter die vier Strahlenpaare der vier im Büschel vorkommenden Kegel, die man als Durchschnitte dieser Kegel mit den ihnen entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels (p) erhält, und endlich in jeder der vier Berührungsebenen, die sich durch r_1 und r_2 an $R^{(4)}$ legen lassen, je zwei, also zusammen 27.

Von den Projectionen derselben werden nur diejenigen der Kegelstrahlen wirkliche Doppeltangenten.

Mit Rücksicht auf den (Seite 292) bewiesenen Satz ergiebt sich also:

Sind r_1 und r_2 zwei sich schneidende Gerade einer Fläche $\varphi^{(3)}$ dritter Ordnung, so sind die Büschelgruppen von Ebenen, durch welche sich jene mit vier anderen Geraden, ausser derjenigen p, welche in der Ebene $(r_1 r_2)$ liegt, verbinden lassen, auf vierfache Art projectivisch.

6. Von P denke man sich an $\varphi^{(3)}$ den Berührungskegel gelegt; die Berührungspunkte seiner Strahlen liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung, welche die Fläche $\varphi^{(3)}$ in $P^{(2)}$ berührt und sie in einer Raumcurve $R_1^{(6)}$ sechster Ordnung durchdringt. Diese hat P zum Doppelpunkt und wird von P aus auf η als eine Curve $\mathfrak{R}_1^{(4)}$ vierter Ordnung projicirt, weil jede Ebene durch P die Raumcurve $R_1^{(6)}$ ausser in P noch in vier Punkten schneidet.

Die beiden Curven $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(4)}$ müssen sich in allen gemeinschaftlichen Punkten berühren, denn $R^{(4)}$ und $R_1^{(6)}$ liegen auf $\varphi^{(3)}$, und $R_1^{(6)}$ ist die Curve der Berührungspunkte.

Ist P_1 ein gemeinschaftlicher Punkt beider Curven $R^{(4)}$ und $R_1^{(6)}$, so berührt in ihm der Strahl PP_1 die Fläche $\varphi^{(3)}$, also auch den Kegelschnitt $P_1^{(2)}$, in welchem die Ebene $[P_1, p]$ die entsprechende Fläche schneidet. Dieser Kegelschnitt hat zu seiner Projection einen von den acht Kegelschnitten des ersten Systems, welche $\mathfrak{R}^{(4)}$ in vier auf einander folgenden Punkten berühren. In der Projection $\mathfrak{P}_1$ von P_1 berühren sich $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(4)}$:

Die beiden Raumcurven $R_1^{(6)}$ und $R^{(4)}$ auf $\varphi^{(3)}$ schneiden sich in acht Punkten, in deren Projectionen acht Kegelschnitte des ersten Systems die Curve $\mathfrak{R}^{(4)}$ vierpunktig berühren; in diesen acht Punkten berühren sich auch $\mathfrak{R}^{(4)}$ und $\mathfrak{R}_1^{(4)}$.

7. Es werde $\varphi_p^{(2)}$ von den Flächen eines Büschels $\varkappa^{(2)}\dots$ in den Raumcurven $K^{(4)}\dots$ eines Büschels mit den Grundpunkten $A_1\dots A_8$ geschnitten; ihre Projectionen $\mathfrak{K}^{(4)}\dots$ bilden ein Büschel von ebenen Curven mit den Doppelpunkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ und den Grundpunkten $\mathfrak{A}_1\dots\mathfrak{A}_8$. Durch $\varphi_p^{(2)}$ und $\varkappa^{(2)}\dots$ wird ein Flächenbündel bestimmt; die Scheitel aller in ihm vorkommenden Kegel liegen auf einer Raumcurve $R^{(6)}$ sechster Ordnung (*R.* Seite 232). In den Projectionen dieser Scheitel schneiden sich je zwei solche Doppeltangenten, welche einen Kegelschnitt des ersten Systems bilden. Da die Projection von $R^{(6)}$ eine ebene Curve $\mathfrak{R}^{(6)}$ sechster Ordnung ist, so folgt:

In einem Büschel von ebenen Curven vierter Ordnung mit denselben beiden Doppelpunkten liegen die Scheitel derjenigen Paare von Doppeltangenten, welche zu den Kegelschnitten des ersten Systems gehören, auf einer ebenen Curve sechster Ordnung.

8. Die Polarebenen von P bezüglich der Flächen des Büschels $(\varphi_p^{(2)}\varkappa^{(2)})$ erzeugen mit den Flächen desselben, wenn man jede Fläche und ihre Polarebene zum Durchschnitte bringt, eine Fläche $\varkappa^{(3)}$ dritter Ordnung. Wenn man $\varkappa^{(2)}$ ändert, so ändert sich auch $\varkappa^{(3)}$; es lässt sich zeigen, dass alle $\varkappa^{(3)}$ ein Büschel bilden.

Zunächst haben sie das Geradenpaar $r_1 r_2$ gemeinsam. Ist ferner Q irgend ein gemeinsamer Punkt der Flächen $\varkappa^{(3)}$ und $\varkappa_1^{(3)}$, so gehen durch ihn zwei Flächen $\lambda^{(2)}$ und $\lambda_1^{(2)}$ der Büschel $(\varphi_p^{(2)}\varkappa^{(2)})$ und $(\varphi_p^{(2)}\varkappa_1^{(2)})$ und die Polarebenen λ und λ_1 von P in Bezug auf dieselben hindurch; sie werden also beide von der Geraden PQ in Q berührt. Im Bündel $\varphi_p^{(2)}\varkappa^{(2)}\varkappa_1^{(2)}\dots$ giebt es unendlich viele Flächen, welche PQ in Q berühren, und in jedem der Büschel $(\varphi_p^{(2)}\varkappa^{(2)})$, ... eine; die Polarebenen von P in Bezug auf diese Flächen gehen also auch durch Q, und Q ist ein Punkt aller Flächen $\varkappa^{(3)}\dots$.

Diese bilden mithin ein Büschel, und dem vorigen Satze kann man folgende Fassung geben:

Wenn die Oberflächen $\varkappa^{(3)}$... eines Büschels zwei Gerade r_1 und r_2 gemein haben, so hat jede Oberfläche noch eine Gerade p in der Ebene $|r_1r_2|$. Durch jede Gerade p lassen sich vier Ebenen legen, welche die zugehörige Fläche $\varkappa^{(3)}$ je in einem Paare von Geraden schneiden. Die Scheitel aller dieser Geradenpaare liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung.

IX. *Harmonische Eigenschaften von $R^{(4)}$.*

1. *Alle Punkte, welche eine Gerade g von einer Raumcurve $R^{(4)}$ harmonisch trennen, liegen auf einer Raumcurve $R^{(6)}$ sechster Ordnung.*

$R^{(4)}$ ist die Knotenlinie des Büschels $\varphi^{(2)}$..., dessen Flächen g in den Punktpaaren F_1F_2, ... einer quadratischen Involution schneiden. Durch jeden dieser Punkte gehen je zwei Secanten

$$f_1f_1' \text{ und } f_2f_2'$$

der Raumcurve; diese Secanten liegen in den Berührungsebenen φ_1 und φ_2 der Punkte F_1 und F_2 an $\varphi^{(2)}$. In diesen Berührungsebenen liegen auch die conjugirten Geraden f_1 und f_2 der Punkte F_1 und F_2 in Bezug auf das Flächenbüschel; sie trennen die Schnittpunkte der Secanten $f_1'f_1''f_2'f_2''$ mit der Raumcurve $R^{(4)}$ harmonisch von g.

Die conjugirten Geradenpaare f_1f_2, ... der Punktpaare F_1F_2, ... bilden auf dem Polarhyperboloid $\gamma^{(2)}$ von g eine involutorische Regelschaar. Ordnet man jede Fläche $\varphi^{(2)}$ ihren Schnittpunkten F_1F_2 mit g oder den conjugirten Geraden f_1f_2 der letzteren zu, so ist das Büschel $\varphi^{(2)}$... projectivisch auf die involutorische Regelschaar bezogen.

Man schneide nun mit einer beliebigen Ebene das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel und die involutorische Regelschaar in einem involutorischen Kegelschnitte. Es kommt sechsmal vor, dass ein Kegelschnitt durch einen entsprechenden Punkt geht; daher giebt es in jeder Ebene sechs Punkte, in denen eine Fläche $\varphi^{(2)}$ von einem entsprechenden Strahle der involutorischen Regelschaar getroffen wird; das Büschel $\varphi^{(2)}$... erzeugt demnach mit derselben eine Raumcurve $R^{(6)}$ sechster Ordnung.

Es ergiebt sich sofort: *$R^{(6)}$ wird von jeder Ebene in sechs Punkten eines Kegelschnittes getroffen.*

Die Raumcurve $R^{(6)}$ geht durch die Berührungspunkte der acht Berührungsebenen, welche sich durch g an $R^{(4)}$ legen lassen.

Die Regelstrahlen des Polarhyperboloids $\gamma^{(2)}$ sind Sehnen von $R^{(6)}$, und

zwar schneiden die conjugirten Strahlen der Punkte von g die Raumcurve in zwei Punkten, die Polargeraden von g in vier Punkten.

Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, schneide man $\gamma^{(2)}$ mit einer Ebene β in zwei Strahlen k und p, von denen der erste die conjugirte Gerade eines Punktes von g, der andere eine Polargerade von g ist. Die Ebene β schneidet das Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ in einem Kegelschnittbüschel $F^{(2)}\dots$; letzteres ist projectivisch auf die Punktinvolution der Geraden p bezogen, in welcher dieselbe von der involutorischen Regelschaar geschnitten wird. Von den Kegelschnitten $F^{(2)}\dots$ gehen aber vier durch ihre entsprechenden Punkte.

Jede Berührungsebene γ durch g an $R^{(4)}$ berührt $R^{(6)}$ zweimal.

Man lege durch g eine beliebige Ebene ε, welche $R^{(4)}$ in den vier Punkten $ABCD$ und das Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ in einem Kegelschnittbüschel $F^{(2)}\dots$ schneidet. Diejenigen sechs Punkte

$$P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4,\quad P_5,\quad P_6,$$

welche g von den Punktpaaren

$$AB,\quad BC,\quad CD,\quad DA,\quad AC,\quad BD$$

harmonisch trennen, liegen auf dem Polarkegelschnitte von g bezüglich $F^{(2)}\dots$, also auch auf $\gamma^{(2)}$, und sind daher Punkte von $R^{(6)}$.

Wenn nun ε zur Berührungsebene γ wird, so fallen von den vier Schnittpunkten $ABCD$ zwei, etwa C und D in C zusammen, also auch P_4 und P_5, P_1 und P_6; in ihnen berühren sich daher γ und $R^{(6)}$.

2. *Die Raumcurve $R^{(6)}$ ist der Durchschnitt des Polarhyperboloids $\gamma^{(2)}$ mit den Flächen vierter Ordnung eines Büschels.*

Aus einer Polargeraden p von $\gamma^{(2)}$ projicirt man die involutorische Regelschaar conjugirter Geraden auf $\gamma^{(2)}$ durch ein involutorisches Ebenenbüschel, welches zum Büschel $\varphi^{(2)}\dots$ in projectivischer Beziehung sich befindet. Die beiden Büschel erzeugen eine Fläche $\varphi^{(4)}$ vierter Ordnung, welche p zur Doppelgeraden hat und durch $R^{(6)}$ geht. — Durch eine andere Polargerade p_1 erhält man eine andere Fläche $\varphi_1^{(4)}$, welche $\varphi^{(4)}$ in $R^{(6)}$ und $R^{(4)}$ durchdringt.

Die projectivischen Ebenenbüschel (p) und (p_1) erzeugen eine Fläche $\gamma^{(4)}$ vierter Ordnung, von welcher $\gamma^{(2)}$ der eine Theil ist; der andere ist eine zweite Regelfläche $\gamma_1^{(2)}$, welche auch p und p_1 zu Regelstrahlen hat. Auf ihr schneiden sich $\varphi^{(4)}$ und $\varphi_1^{(4)}$ in einer zweiten Raumcurve $R_1^{(6)}$ sechster Ordnung; also:

Die Flächen $\varphi^{(4)}$ und $\varphi_1^{(4)}$ durchdringen sich in einer zweiten Raumcurve $R_1^{(6)}$ sechster Ordnung, die auch auf einem einfachen Hyperboloid verläuft.

Die beiden Hyperboloide $\gamma^{(2)}$ und $\gamma_1^{(2)}$ durchdringen sich in einem windschiefen Vierseite, dessen Seiten pp_1 und die Doppelstrahlen kk_1 der involutorischen Regelschaar sind.

Durch Projection erhält man:

Alle Punkte, welche einen festen Punkt $\mathfrak{A}$ von einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{R}^{(4)}$ mit zwei Doppelpunkten harmonisch trennen, liegen auf einer Curve sechster Ordnung, welche durch die Doppelpunkte und die Berührungspunkte der Tangenten von $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{R}^{(4)}$ geht und diese Tangenten zu Doppeltangenten hat.

3. Es bleibt noch die Frage zu beantworten: Welches ist der Ort eines Punktes, der eine Ebene ε harmonisch von der Raumcurve $R^{(4)}$ trennt?

Ist l eine beliebige Gerade, so liegen die ihren Punkten bezüglich $R^{(4)}$ zugeordneten harmonischen Punkte auf einer Raumcurve $L^{(6)}$; diese schneidet ε in sechs Punkten, deren zugeordnete harmonische Punkte auf l liegen. Also ist der gesuchte Ort eine Fläche $\varphi^{(6)}$ sechster Ordnung; somit folgt:

Der Ort eines Punktes, der eine Ebene harmonisch von einer Raumcurve $R^{(4)}$ vierter Ordnung trennt, ist eine Fläche sechster Ordnung, welche durch diese Raumcurve hindurchgeht.

Weissenburg, März 1884.

Principien der Statik monocyklischer Systeme.
Zweiter Aufsatz.

(Von Herrn *H. von Helmholtz.*)

§ 8.
Ein allgemeiner Charakter der physischen Verbindungen bewegter Körper.

In § 5 habe ich die Bedingungen besprochen, unter denen in einem zusammengesetzten monocyklischen Systeme die lebendige Kraft ein integrirender Nenner ist. Es zeigte sich, dass dies für alle bisher bekannten Fälle mechanischer Koppelung je zweier cyklischer Bewegungen der Fall ist. Aber die dort herbeigezogenen Betrachtungen über die allgemeinen charakteristischen Verhältnisse von Verbindungen bewegter Körper genügten nicht, die Möglichkeit anderer Arten von Verbindungen auszuschliessen, bei denen die oben genannte Folgerung nicht zutreffen würde.

Ausserdem ist der Beweis jenes Satzes dort auf die von mir in § 4 gegebene Integrationsform der zur Bestimmung der Entropie des gefesselten Systems dienenden Differentialgleichungen gestützt. Diese Integrationsform ist allerdings im Allgemeinen ausreichend, nämlich wenn die aus ihr hergeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der s_b alle von einander unabhängig sind. Aber in speciellen Fällen können dieselben auch von einander abhängig werden. Dann genügt jene allgemeine Form nicht mehr, sondern man muss dann zu der von Herrn *L. Kronecker* entwickelten allgemeineren Form der Integration übergehen *).

Ich will in diesem Paragraphen zunächst ein bisher nicht benutztes allgemeines Princip, betreffend den Charakter aller durch ponderable Naturkörper zwischen bewegten Körpern herstellbaren Verbindungen anwenden, welches die volle Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes erlaubt, und gleichzeitig einen Beweis desselben ermöglicht, der die Integration der Differentialgleichungen für die Art der Fesselung nicht voraussetzt.

*) S. oben S. 141—145.

Es liegt hier ein einigermaassen neuer Fall vor, insofern es sich um Herstellung fester Verhältnisse zwischen Geschwindigkeiten handelt, während bei den älteren Untersuchungen mechanischer Probleme, wo feste Verbindungen angenommen wurden, man darunter nur die Unveränderlichkeit bestimmter räumlicher Abmessungen verstand. Einzelne Beispiele solcher Verbindungen von Geschwindigkeiten, wie die Wirkungen von Zahnrädern, unendlichen Schnüren und Frictionsrollen, die wie Zahnräder mit sehr feinen Zähnen wirken, schliessen sich noch nahe genug an die festen Verbindungen der letzteren Klasse an, da jedes Paar in einander greifender Zähne zweier Räder nur als feste Körper auf einander wirken.

In § 4 S. 124 habe ich nur zwei Eigenschaften solcher Verbindungen für die Gewinnung der Gleichungen des Problems verwendet, dieselben, welche auch in der bisherigen Mechanik fester Körper verwendet worden sind, nämlich 1) dass die Verbindungen gar keinen Einfluss haben, so lange die Bewegung schon an und für sich so vor sich geht, wie es ihnen entspricht; 2) dass sie keine Arbeit erzeugen oder vernichten. Die Frage nach den Fällen, wo die lebendige Kraft integrirender Factor des durch die Verbindungen entstehenden zusammengesetzteren monocyklischen Systems wird, führte uns dann auf die Abgrenzung derjenigen Fälle, die ich in § 5, S. 133 als die *rein kinematischen Verbindungen* bezeichnet habe.

Diese letztgenannte Unterscheidung kann auf noch allgemeinere Betrachtungen zurückgeführt werden.

Wirklich herstellen können wir nämlich solche Verbindungen immer nur mit Hülfe von Naturkörpern geeigneter Art, und wenn auch unter Umständen von deren Masse und Energie in der mathematischen Fassung des Problems nicht weiter die Rede zu sein braucht: so kann schliesslich auf diesem Wege doch nichts geschehen, was den allgemeinsten Gesetzen der Statik und Dynamik ponderabler Körper widerspräche.

In diesem Sinne sind also z. B. die Verbindungen, welche räumliche Abmessungen fest machen, als elastische Körper zu behandeln, die bestimmten Formänderungen einen sehr grossen Widerstand entgegensetzen. Dies wird hier weiter auszuführen nicht nöthig sein.

Für die Verbindungen von Geschwindigkeiten, um die es sich jetzt handelt, ist Folgendes zu erwägen. Gehen wir zurück auf die von *Lagrange* für das vollständige System aufgestellten Bewegungsgleichungen. Wir haben in § 2 die potentielle Energie des Systems mit Φ bezeichnet, mit L die

lebendige Kraft. Φ ist dann eine Function der Coordinaten p_a allein, L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten

$$(11.) \qquad q_a = \frac{\partial p_a}{\partial t},$$

deren Coefficienten Functionen der p_a sind. Die Bewegungsgleichungen sind

$$(11^a.) \qquad P_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right).$$

Darin ist $P_a . dp_a$ der Werth der Arbeit, den das System bei der Aenderung dp_a nach aussen hin abgiebt, und $(-P_a)$ ist die äussere Kraft, welche nöthig ist, um die Bewegung ungestört fortgehen zu lassen, wenn die p_a als Functionen der Zeit gegeben sind. Diese äusseren Kräfte habe ich in den gegebenen Sätzen über die vollständigen monocyklischen Systeme als vollkommen willkürlich bestimmbar angesehen.

Wenn nun die p_a als Functionen der Zeit irgend einer möglichen Bewegungsweise des Systems entsprechend bestimmt worden sind, so können wir unter entsprechender Abänderung der Kräfte P_a dieselbe Bewegung auch durchweg langsamer oder schneller vor sich gehen lassen. Setzen wir

$$t = n . \mathfrak{t}$$

und bezeichnen wir die Werthe der P, p, q und des L, nachdem das t durch $n\mathfrak{t}$ ersetzt ist, mit den entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{L}$, so bleibt der Theil der Kräfte P, der von Φ abhängt, ganz ungeändert, während

$$q_a = \frac{\partial p_a}{\partial t} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \mathfrak{p}_a}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{q}_a,$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_a} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_a},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_a}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{q}_a}\right].$$

Es werden also alle Componenten der Kräfte, welche von L abgeleitet sind, sowohl diejenigen, welche in die P_a, als auch diejenigen, welche in die P_b hineinfallen, gleichmässig auf das n^2-fache gesteigert, wenn wir die Zeit aller Vorgänge auf $\frac{1}{n}$ ihrer früheren Dauer reduciren.

Wenn nun die betreffende Bewegung eine polycyklische ist, wenn sich also während derselben *erstens* ein Theil der Coordinaten, die wir mit p_b bezeichnet haben, immer nur so verändert, dass weder Φ noch die Coef-

ficienten in L dadurch geändert werden, so wird diese Bedingung auch erfüllt werden, wenn statt des t die kürzere Zeit $\mathfrak{t}$ eintritt, und es wird somit hierdurch die Erfüllung dieser ersten Bedingung der polycyklischen Bewegung nicht beeinträchtigt.

Die *zweite* Bedingung, durch die wir unsere Probleme als statische charakterisirten, war, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial p_a}{\partial t}$ und $\frac{\partial q_b}{\partial t}$ verschwindend kleine Werthe haben sollten. Da

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \mathfrak{p}_a}{\partial \mathfrak{t}},$$

$$\frac{\partial q_b}{\partial t} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}_b}{\partial \mathfrak{t}},$$

so wird auch diese Bedingung nicht verletzt, so lange n endliche Werthe hat.

Unser polycyklisches System bleibt also polycyklisch, auch wenn sämmtliche Geschwindigkeiten in gleichem Maasse gesteigert oder vermindert werden. Nur die Kräfte P_a, welche übrigens im vollständigen System als willkürlich bestimmbar von uns betrachtet worden sind, müssen entsprechend geändert werden, ebenso wie die P_b in dQ_b.

Daraus folgt weiter, dass, wenn irgend welche physisch ausführbaren Verbindungen zwischen den verschiedenen cyklischen Bewegungen des Systems eingeführt, dadurch die Werthe der q_b alle von dem Werthe einer dieser Grössen abhängig gemacht, und das System in ein monocyklisches verwandelt wird: doch immer die durch Einführung des $\mathfrak{t}$ als Zeit, statt des t ausgedrückte Verlangsamung oder Beschleunigung der Bewegung möglich sein muss, unter entsprechender Aenderung der Kräfte P_a und mit unveränderten Werthen der Parameter p_a. Keine mit physischen Körpern herstellbare Art der Fesselung cyklischer Bewegungen kann also vermeiden, jede beliebige proportionale Steigerung aller Geschwindigkeiten zuzulassen, wobei die Verhältnisse dieser Geschwindigkeiten zu einander unverändert bleiben, so lange alle Coordinaten p_a ihren Werth constant halten. Diese letzteren Verhältnisse also können in dem, wie auch immer, gefesselten monocyklischen System sich nur mit Aenderung der p_a ändern, also nur Functionen der Coordinaten sein.

Wenn die Lage aller mitbewegten Theile vollständig bekannt ist, und ihre Coordinaten in den Werthen der Energie vorkommen, so ist dies alles selbstverständlich. Nun können aber gelegentlich unter den mitbewegten Stücken solche von verschwindender Masse vorkommen, die eben des-

halb keinen endlichen Antheil zur lebendigen Kraft geben, auch von äussern Kräften nicht angegriffen werden, und doch die Bewegungen der schwereren Theile von einander abhängig machen, wie es unendliche Schnüre, Frictionsrollen, u. s. w. thun. Deren besondere Lage und Bewegung kann dann vernachlässigt werden, obgleich die durch sie vermittelte Verbindung der schwereren bewegten Theile bestehen bleibt, und nur diese letztere in der mathematischen Fassung des Problems berücksichtigt wird. Und da auch unbekannte complicirte Mechanismen dieser Art sich einschalten könnten, so ist es wichtig, den allgemeinsten Charakter ihrer Wirksamkeit definiren zu können.

Die Bedingungen für eine jede Fesselung, durch welche ein polycyklisches System in ein monocyklisches verwandelt werden kann, sind auf S. 125 d. B. entwickelt. Behalten wir die dort gegebene allgemeinste Form bei, so sollen die s_b, λ und σ so als Functionen der unabhängigen Veränderlichen p_a und x bestimmt werden, dass

$$\text{(12.)} \quad \begin{cases} dQ = \sum_b [dQ_b], \\ dQ = \lambda . d\sigma = \sum_b [q_b . ds_b] \end{cases}$$

wird. Die q_b sind als Functionen der s_b und p_a gegeben, und sind in dem Falle des vollständigen Systems, auf den wir uns hier beschränken, homogene lineare Functionen der s_b; das x muss die Geschwindigkeit der Bewegungen bestimmen.

Zunächst ist zu bemerken, dass unter den in diesem Paragraphen gemachten Voraussetzungen Aenderungen der Coordinaten allein, welche die Entropie σ nicht verändern, dies auch nicht thun dürfen, wenn dieselben Aenderungen bei n-fach gesteigerten Geschwindigkeiten eintreten. Denn, wie vorher gezeigt, sind die Grössen

$$dQ_b = q_b . ds_b$$

dann einfach die n^2-fachen Werthe der früheren, ihre Summe $dQ = \lambda . d\sigma$ also Null, wenn sie vorher Null war.

Unter der aufgestellten Bedingung, wonach nämlich die Coordinaten und Geschwindigkeiten sich so ändern sollen, dass der zur Zeit bestehende Werth von σ ungeändert bleibt, werden bei monocyklisch gefesseltem System die q_b und also auch die s_b bestimmte Functionen der Coordinaten p_a sein müssen. Wenn wir die sämmtlichen Geschwindigkeiten q und also auch

die sämmtlichen Grössen s auf das n-fache steigern, erhalten wir eine zweite Gruppe von zusammengehörigen Werthen der q, s und p, welche einem anderen constant bleibenden Werthe der Entropie σ entsprechen. Da nun für die Entropie auch immer eine beliebige Function der Entropie gesetzt werden kann, so können wir die einzelnen geänderten Werthe der Entropie in dem vorliegenden Falle auch durch die verschiedenen Werthe des n charakterisiren, oder das n dem σ proportional setzen.

Bei Steigerung der Geschwindigkeiten allein, ohne Aenderung der Coordinaten, wird keinerlei Arbeit von Kräften

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} = +\frac{\partial L}{\partial p_a} = 0$$

verrichtet. Also entspricht hierbei die Arbeit dQ nur der eingetretenen Steigerung der lebendigen Kraft.

Setzen wir also

$$(12^a.) \qquad q_b = n.\mathfrak{q}_b \quad \text{und} \quad s_b = n.\mathfrak{s}_b,$$

so wird einmal

$$(12^b.) \qquad dQ = \frac{\partial L}{\partial n}\cdot dn = n.dn.\sum_b [\mathfrak{q}_b.\mathfrak{s}_b]$$

und andererseits

$$(12^c.) \qquad \begin{cases} dQ = \sum_b [q_b.ds_b] \\ \quad\; = n^2\sum_b [\mathfrak{q}_b.d\mathfrak{s}_b] + n.dn.\sum_b [\mathfrak{q}_b.\mathfrak{s}_b]. \end{cases}$$

Aus der Vergleichung beider Werthe von dQ folgt:

$$(12^d.) \qquad \sum_b [\mathfrak{q}_b.d\mathfrak{s}_b] = 0.$$

Da die $d\mathfrak{s}$ nur von Aenderungen der Coordinaten p_a abhängen, welche als ganz unabhängig von einander vorausgesetzt werden, so ergeben sich aus dieser letzten Gleichung die partiellen Differentialgleichungen:

$$(12^e.) \qquad \sum_b \left[\mathfrak{q}_b \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_b}{\partial p_a}\right] = 0$$

in Bezug auf alle p_a, die in den Werthen der $\mathfrak{s}_b$ vorkommen. Dies sind die Gleichungen, welche zur Bestimmung der $\mathfrak{s}$ ebenso, wie die Gleichungen (6^d.) des § 4 benutzt werden können. Zunächst ist hier zu bemerken, dass die Gleichung (12^b.) geschrieben werden kann:

$$(12^f.) \qquad \begin{cases} dQ = 2L\cdot\frac{dn}{n}, \\ \quad\; = 2L.d\log n, \end{cases}$$

woraus folgt, dass *die lebendige Kraft der Bewegung nothwendig einer der integrirenden Nenner des durch die Verbindung erzeugten monocyklischen Systems sein muss.*

Dieser Satz ergiebt sich also hier für die vollständigen monocyklischen Systeme mit nur physischen Verbindungen und unbeschränkten Kräften P_a als allgemeingültig.

Wir haben schon in § 5 die Analogie mit den Verhältnissen der einfachen monocyklischen Systeme hervorgehoben. Bei diesen ist nach § 3 Gleichung (5^a.)

$$(5^a.) \quad \begin{cases} 2L = q.s, \\ dQ = q.ds = 2L.d(\log s). \end{cases}$$

Wenn wir versuchen, statt s eine Function von s als Entropie einzuführen, so finden wir, dass nur das Product von s mit einer Constanten c die Form der beiden obigen Ausdrücke unverändert lässt:

$$2L = \left(\frac{q}{c}\right)\cdot cs,$$

$$dQ = \left(\frac{q}{c}\right)\cdot d(cs).$$

Ebenso können wir in (12^f.) setzen:

$$s = cn,$$

$$q = \frac{2L}{cn},$$

und erhalten dadurch die ganz analogen Ausdrücke, wie für ein einfaches monocyklisches System. Die beiden so bestimmten Grössen q und s wachsen umgekehrt proportional der Zeit, welche bei gleichen Werthen sämmtlicher p_a und ungleicher Geschwindigkeit gebraucht wird, um die gleiche Lagenveränderung auszuführen. Man wird den Factor c meist zweckmässig so bestimmen können, dass q frei von der Masse wird, dann wird s der Masse proportional werden müssen. Es wird also q alsdann eine Raumgrösse dividirt durch eine Zeit, die man als *resultirende Geschwindigkeit* bezeichnen kann, während s, so bestimmt, die Bedeutung des resultirenden *Bewegungsmomentes* erhält. Mit einem willkürlichen Zahlenfactor werden beide aber immer behaftet bleiben.

Nach den gewonnenen Ergebnissen werden sich also diese beiden Begriffe auf jeden Fall auch zusammengesetzter monocyklischer Bewegungen anwenden lassen, und es wird dadurch die Unbestimmtheit, welche der pro-

visorischen Uebertragung des Begriffs der Entropie auf die monocyklischen Systeme anhaftete, beseitigt.

Uebrigens können die Raumgrössen, welche der Grösse $q.t$ entsprechen, von sehr verschiedenen Dimensionen sein. Für rotirende Kreisel ist q die Rotationsgeschwindigkeit, also $q.t$ ein Bogen oder Winkel, d. h. eine reine Zahl. Für circulare Wasserströme ist es ein Volumen.

Wenn $q.t$ die Dimension L^k hat, so hat $s.t$ die Dimension $M.L^{2-k}$ und

$$(12^g.)\quad \frac{s}{q} = [M.L^{2-2k}].$$

Dies macht es oft möglich, den Werth des k zu finden.

Für die Wärmebewegung der Masse m eines Gases ist nach der am Schlusse von § 3 gewählten Bezeichnung:

$$\begin{aligned} L &= \mathfrak{J}.m.\gamma.\vartheta, \\ dQ &= 2L.d\mathfrak{S}, \\ &= m.\mathfrak{J}.\left(\gamma.d\vartheta + (c-\gamma).\vartheta.\frac{dv}{v}\right), \end{aligned}$$

woraus, wie bekannt, folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \log s = \log\left[C.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{c-\gamma}{2\gamma}}\right], \\ q &= \frac{2L}{s} = \mathfrak{J}.\frac{m\gamma}{C}.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{\gamma-c}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Um q von der Masse frei zu machen, wird man die Integrationsconstante C setzen können

$$C = \frac{m}{b}$$

und erhält

$$\begin{aligned} q &= \mathfrak{J}.b.\gamma.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{\gamma-c}{2\gamma}}, \\ s &= \frac{m}{b}.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{c-\gamma}{2\gamma}}. \end{aligned}$$

Für einatomige Gase ist

$$c = \tfrac{5}{3}.\gamma,$$

also

$$\begin{aligned} q &= \mathfrak{J}.b.\gamma.\sqrt{\vartheta}.v^{-\frac{1}{3}}, \\ s &= \frac{m}{b}.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{1}{3}}, \\ \frac{s}{q} &= \frac{m}{\mathfrak{J}.b^2.\gamma}.v^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, da $v^{\frac{2}{3}}$ das Quadrat einer Länge zur Dimension hat, und der

Werth von $\frac{s}{q}$ sonst nur Constanten enthält, dass das k in (12^g.) auch für die einatomigen Gasmolekeln gleich Null ist, wie bei den Rotationsgeschwindigkeiten. Dann enthält die Grösse $\sqrt{\vartheta}$ von veränderlichen Grössen nur das Product einer Rotationsgeschwindigkeit mit einer Länge, d. h. eine Weggeschwindigkeit. In der That wird bei gleichbleibender Beschaffenheit des Gases $\sqrt{\vartheta}$ durch eine solche gemessen. Für Vergleichung verschiedener Gase wird allerdings ϑ durch die lebendige Kraft des Molekels mq^2, nicht q^2, bestimmt.

Bei zweiatomigen Molekeln treten wegen der hinzukommenden intramolecularen Bewegung Abweichungen von diesen Bestimmungen ein.

Dass die Koppelung hier Gleichheit der lebendigen Kraft und nicht Gleichheit der resultirenden Geschwindigkeit fordert, ist schon am Schluss von § 6 bemerkt worden.

Die einfache Bedeutung, welche der die Entropie in den Gleichungen (12^a.) bis (12^f.) vertretenden Grösse n zukommt, und übrigens unter einschränkenden Annahmen schon von den Herren ***Boltzmann*** und ***Clausius*** in den Seite 129 citirten Aufsätzen bemerkt und hervorgehoben war, wird in den unvollständigen monocyklischen Systemen, wo Coordinaten p_c mittels der Gleichungen $P_c = 0$ eliminirt sind (s. § 2 Gleichungen (4.) bis (4^d.)) verdeckt, weil in ihnen Zustände verschiedener Geschwindigkeit mit gleich bleibenden Coordinaten der Regel nach nicht mehr vorkommen können. Die sich hier anschliessenden Fälle aus der Wärmelehre beziehen sich fast immer gerade auf solche unvollständige Systeme, in denen nur noch sehr wenige willkürlich veränderliche Coordinaten geblieben sind.

Uebrigens sind die Bewegungen der *unvollständigen Systeme* doch immer nur als besondere Fälle der Bewegungen der vollständigen zu betrachten, eingeschränkt dadurch, dass gewisse Kräfte P_c, welche in den vollständigen als willkürlich veränderlich betrachtet werden, dauernd den bestimmten Werth Null erhalten. Unvollständig ist in den als solche bezeichneten Systemen also nur die Veränderlichkeit der Kräfte. Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass alle Sätze, welche für die vollständigen Systeme mit ganz willkürlich veränderlichen Kräften P gelten, auch für die unvollständigen gelten müssen, dass also auch bei diesen die lebendige Kraft nothwendig einer der integrirenden Factoren ist.

§ 9.

Die Integration der Fesselungsgleichungen für ein physisch verbundenes System.

Die Aufgabe, die analytischen Ausdrücke solcher Verbindungen zu finden, die ein polycyklisches System monocyklisch zu machen geeignet sind, ist in § 4 behandelt worden. Wenn wir uns, wie in § 8 auf physisch mögliche Verbindungen beschränken, treten die Gleichungen (12^e.) ein, welche ein etwas einfacheres System darstellen, als die Gleichungen (6^d.) und (6^e.) des § 4, und von vorn herein schon die von Herrn *L. Kronecker* (Seite 141 dieses Bandes Gleichung (I.)) gewählte Normalform haben. Denn die darin vorkommenden $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ sind Functionen der Coordinaten allein, und entsprechen solchen Werthen der Bewegungsmomente, wie sie bei constant bleibender Entropie, deren Werth also als eine Constante C zu bezeichnen ist, eintreten können.

Die Voraussetzung physischer Verbindungen bei vollständiger Bewahrung aller Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ bedingt:

1. dass alle Gleichungen zwischen den $\mathfrak{s}$ und dem C, so weit sie nur durch die Verbindungen des Systems bedingt sind, nicht geändert werden, wenn alle diese Grössen mit demselben Factor n multiplicirt werden. Alle diese Gleichungen müssen also homogen nach den $\mathfrak{s}$ und dem C sein.

2. Die Geschwindigkeiten sind darzustellen in der Form:

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}.$$

Hierin ist $\mathfrak{L}$ eine homogene ganze Function zweiten Grades der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, deren Coefficienten im Allgemeinen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ sind. Die Anzahl der letztern kann bis zu $\frac{1}{2}\mathfrak{B}(\mathfrak{B}+1)$ steigen, wenn $\mathfrak{B}$, wie früher, die Anzahl der vorkommenden $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ bezeichnet. Das System der Differentialgleichungen ist also:

$$(14.) \quad 0 = \sum_\mathfrak{b} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}} \right].$$

Wenn wir die früher von mir gegebene Form der Integration dem hier vorliegenden Falle anpassen, so erhält man eine Lösung, wenn man eine Function F von sämmtlichen Grössen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, die aber für den hier vorliegenden Fall homogen ersten Grades sein muss, eventuell gebrochen oder irrational sein kann, willkürlich wählt und dann setzt:

$$(14^a.) \quad \begin{cases} F = C, \\ \mathfrak{q} = \lambda \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}. \end{cases}$$

Dies sind $(\mathfrak{B}+1)$ Gleichungen mit den $(\mathfrak{B}+1)$ Unbekannten $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ und λ, welche also im Allgemeinen ausreichen, die Unbekannten zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die Gleichungen (14^a.) alle von einander unabhängig sind.

Die Grösse λ kann man herausschaffen, wenn man durch Multiplication der Gleichungen (14^a.) mit dem zugehörigen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ die Summe bildet:

$$\sum_\mathfrak{b} [\mathfrak{q}_\mathfrak{b} . \mathfrak{s}_\mathfrak{b}] = 2\mathfrak{L} = \lambda . F,$$

also

$$\lambda = \frac{2\mathfrak{L}}{F}.$$

Danach wird die Reihe der Gleichungen (14^a.) die Form erhalten:

$$(14^b.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} - \frac{2\mathfrak{L}}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = 0,$$

oder, wenn man mit F^2 dividirt:

$$(14^c.) \qquad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \left[\frac{\mathfrak{L}}{F^2} \right] = 0.$$

Die Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ müssen also so gewählt werden, dass ***das Verhältniss*** $\frac{\mathfrak{L}}{F^2}$ ***ein Grenzwerth wird.*** Oder: ***Wenn die Grössen*** $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ ***so variirt werden, dass*** $\delta F = 0$, ***muss auch*** $\delta \mathfrak{L} = 0$ ***sein.*** Die Gleichungen (14^b.) und (14^c.) ergeben aber nur Verhältnisse der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$. Erst die Gleichung $F = C$ bestimmt den Werth jedes einzelnen durch den Werth von C, welches letztere schliesslich als ein willkürlich zu wählender Factor in den Werthen der $s_\mathfrak{b}$ stehen bleibt.

Im Allgemeinen genügen diese Bedingungen zur Bestimmung der $\mathfrak{s}$, beziehlich ihrer Verhältnisse zu einander. Die Fälle, wo dieselben ungenügend sind, werden ausgefüllt durch die Form der Integration, welche Herr *L. Kronecker* entwickelt hat. In der hier gebrauchten Bezeichnung entsprechen

$$\text{seinem } x, \quad \frac{y_\mathfrak{b}}{y_\varrho}, \quad \varphi_\mathfrak{b}$$

$$\text{unsere } p, \quad \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{C}, \quad \frac{\mathfrak{q}_\mathfrak{b}}{C},$$

und der die beliebige Function P enthaltende Ausdruck

$$y_\varrho . \psi_\varrho = y_\varrho . P . \varphi_\varrho = \frac{1}{\lambda}.$$

Das ϱ bezeichnet hierin einen bestimmten von den Indices $\mathfrak{b}$. Seine Functionen f_r, welche gewisse y_r als Functionen der andern y_g darstellen, müssen

im Falle rein physischer Verbindungen, der hier vorausgesetzt wird, homogene Functionen erster Ordnung sein, wie oben bemerkt. Unter diesen Umständen verschwindet y_ϱ ganz aus der Function, und statt der übrigen y treten nur die entsprechenden $\mathfrak{s}$ ein. Die so entstehende Function $\lambda . \Phi$ ist homogen zweiten Grades nach den $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ und C, wie die oben von uns gebrauchte entsprechende Function $\lambda(F-C)$. Der wesentliche Unterschied liegt nur darin, dass das Φ noch einige der p enthalten kann, die ich mit $p_\mathfrak{r}$ bezeichnen will, und dass zu den Gleichungen, welche den obigen (14.) und (14^a.) entsprechen, nämlich:

$$(15.) \quad \Phi = 0,$$

$$(15^a.) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{b},$$

noch neue hinzukommen:

$$(15^b.) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{r}} = 0.$$

Da die Anzahl der Gleichungen (15.) und (15^a.) schon ebenso gross ist, als die der Unbekannten λ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, so sind in diesem System nothwendig $\mathfrak{R}$ Gleichungen Folge der andern.

Der von Herrn ***Kronecker*** gegebene Beweis zeigt, dass, wenn überhaupt die Differentialgleichungen erfüllt werden können, indem man die $\mathfrak{s}$ irgend welchen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ gleich setzt, eine Function Φ mit den in den Gleichungen (15.), (15^a.) und (15^b.) definirten Eigenschaften existiren muss.

Nun ist zunächst zu bemerken, dass, so lange in den Gleichungen (15^b.) noch irgend welche $p_\mathfrak{r}$ vorkommen (mit $p_\mathfrak{t}$ zu bezeichnen), die mittels dieser Gleichungen als Functionen der übrigen und der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ dargestellt werden können, diese sich aus der Function Φ eliminiren lassen, ohne die Gültigkeit der Gleichungen (15.), (15^a.) und (15^b.) zu stören.

Bezeichnen wir nämlich den Werth von Φ nach der Elimination der $p_\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{F}$, so ist wegen der Gleichungen (15^b.):

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} + \sum_\mathfrak{t} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{t}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_\mathfrak{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{r}} + \sum_\mathfrak{t} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{t}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{t}}{\partial p_\mathfrak{r}} \right] = 0$$

und identisch:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_\mathfrak{t}} = 0.$$

Wir werden also die Elimination der $p_\mathfrak{r}$ aus Φ fortsetzen können, bis die Gleichungen (15^b.) selbst, oder wenigstens ihre gleich Null zu setzenden Factoren gar keine $p_\mathfrak{r}$ mehr enthalten, sondern Gleichungen nur noch zwischen den $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ sind. Dies würde z. B. geschehen, wenn die Function Φ jedes $p_\mathfrak{r}$ nur in einer Function

$$\varphi_\mathfrak{r} = \psi_\mathfrak{r} + p_\mathfrak{r} \cdot \chi_\mathfrak{r}$$

enthielte. Dann wäre die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_\mathfrak{r}} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mathfrak{r}} \cdot \chi_\mathfrak{r}$$

erfüllt durch die Annahme

$$(15^c.) \qquad \chi_\mathfrak{r} = 0,$$

falls diese den überflüssigen Gleichungen entspricht. Die Gleichungen (15^c.), welche keine $p_\mathfrak{r}$ mehr enthalten, werden dadurch zu erfüllen sein, dass man eine gewisse Anzahl der Grössen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, die ich durch die Bezeichnung $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ unterscheiden will, durch die übrigen $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$ ausdrückt. Ich bezeichne diesen in $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$ ausgedrückten Werth des $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ als $f_\mathfrak{h}$, also

$$(15^d.) \qquad \mathfrak{s}_\mathfrak{h} = f_\mathfrak{h}.$$

Diese Ausdrücke kann man anwenden, um die $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ aus Φ zu eliminiren; den dadurch gewonnenen Werth von Φ bezeichne ich mit $h - C$. Also

$$(15^e.) \qquad \Phi = h - C = 0.$$

Die Grössen $\chi_\mathfrak{r}$ werden dabei alle gleich Null; folglich enthält das h keine $p_\mathfrak{r}$ mehr, sondern ist eine Function nur der $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$. Die Gleichungen (15^c.), welche dadurch identisch werden, differentiirt, ergeben

$$(15^f.) \qquad 0 = \frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} + \sum_\mathfrak{h} \left[\frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} \right].$$

Ferner hat man

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{g} = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}$$

$$= \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} - \lambda \cdot \sum_\mathfrak{h} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} \right],$$

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{h} = \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}}.$$

Also:

$$(15^g.)\,^{*}) \qquad \mathfrak{q}_\mathfrak{g} + \sum_\mathfrak{h} \left[\mathfrak{q}_\mathfrak{h} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} \right] = \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}.$$

---

*) Diese Gleichung ist analog der von Herrn *L. Kronecker* unter (IV.) S. 142 aufgestellten, hat aber eine etwas andere Abgrenzung der Indices $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$.

Die Gleichungen (15^g.) in Verbindung mit (15^d.) und (15^e.) sind an Zahl wiederum genügend, um die Unbekannten $\mathfrak{s}_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ und λ zu bestimmen, wenn keine der genannten Gleichungen von den andern abhängig ist. Die in (15^d.), (15^e.) und (15^g.) gegebenen Werthe der $\mathfrak{q}_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}$ erfüllen übrigens das System der Differentialgleichungen

$$\Sigma\left[\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}}{\partial p_a}\right] = 0,$$

wie leicht zu sehen ist, ohne dass die Functionen h und $f_{\mathfrak{b}}$ noch weiteren neuen Bedingungen unterworfen werden. Diese können also willkürlich gewählte Functionen sein.

Das System der Gleichungen (15^c.), von dem wir ausgingen, enthält mehr Gleichungen als Unbekannte. Die überschüssigen Gleichungen müssen aber erfüllt werden wenigstens durch eines oder einige der Werthsysteme der $\mathfrak{s}$, welche aus der genügenden Zahl von Gleichungen hergeleitet sind.

Wir haben schliesslich noch die Fälle zu besprechen, wo die gewonnenen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten nicht ausreichen.

Die Gleichungen:

$$(16.) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}}$$

werden von einander nicht unabhängig sein, wenn eine Anzahl $\mathfrak{s}$, die wir mit $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$ bezeichnen wollen, in $\mathfrak{L}$, wie in F nur in einer kleineren Anzahl von Functionen der $\mathfrak{s}$ vorkommen, die wir mit h_t bezeichnen wollen. Da $\mathfrak{L}$ eine ganze homogene Function zweiten Grades der $\mathfrak{s}$ ist, werden auch die h_t nur ganze homogene Functionen ersten oder zweiten Grades sein können, und da F frei von den p sein soll, wird dies auch für die h_t zutreffen müssen. Dann würde in Bezug auf die $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$ die obige Gleichung lauten

$$(16^a.) \quad \sum_t\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}}\right] = \lambda \sum_t\left[\frac{\partial F}{\partial h_t} \cdot \frac{\partial h_t}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}}\right].$$

Und diese Gleichungen wären erfüllt, wenn

$$(16^b.) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_t} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial h_t},$$

welches letztere nach der gemachten Annahme weniger Gleichungen sind, als die unter (16^a.) angegebenen.

Wenn der Werth von $\mathfrak{L}$ explicit durch die p_a und $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ gegeben ist, wird sich schon vor Bildung der Function F erkennen lassen, ob eine solche

Möglichkeit vorhanden ist. Dabei ist zu bemerken, dass, wenn zwei Grössen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ nur in einer linearen Verbindung mit constanten Coefficienten im Werthe von $\mathfrak{L}$ vorkommen, dies zur Folge hat, dass das Verhältniss von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ direct durch den Werth von $\mathfrak{L}$ gegeben ist, und also überhaupt nicht mehr durch die Wahl von F geändert werden kann. In diesem Falle wird $\mathfrak{L}$, als Summe von Quadraten dargestellt, weniger Quadrate liefern, als Grössen $\mathfrak{s}_b$ darin vorkommen. Wenn die Grössen h dagegen Ausdrücke zweiten Grades mit constanten Coefficienten sind, wird sich dies ebenfalls erkennen lassen, und eine Function F, welche eines oder mehrere derselben h enthält, wird keine vollkommen bestimmten Werthe der $\mathfrak{s}_b$ mehr liefern können, sondern nur Werthe der h_t und der nicht in ihnen enthaltenen $\mathfrak{s}_g$. Die $\mathfrak{s}_b$ sind dann nur so weit bestimmt, als sie sich verändern können, ohne die h_t zu ändern.

Eine vollständige Bestimmung der $\mathfrak{s}_b$ wird dann nur durch Anwendung einer Form von F eintreten können, in der diese Function statt der h andre ihnen an Werth gleiche, aber noch Coordinaten p_r enthaltende Functionen η einschliesst, und zwar muss die Anzahl der η und p_r zusammengenommen mindestens der Zahl der in den η enthaltenen $\mathfrak{s}_b$ gleich sein. Dann gesellen sich zu den früheren Gleichungen noch die, welche dem

$$\frac{\partial F}{\partial p_r} = 0$$

entsprechen. Falls F Grössen p_r nur in den h enthält, sind diese Bedingungen erfüllt, wenn

$$(16^c.)\qquad \frac{\partial \eta_t}{\partial p_r} = 0$$

für alle in den η_t vorkommenden p_r. Soll diese Lösung aber in Bezug auf die Werthe der $\mathfrak{s}_a$ und h_t mit der früheren übereinstimmen, so muss sich ergeben

$$(16^d.)\qquad \eta_t = h_t,$$

wenn die Werthe der p aus den Gleichungen $(16^c.)$ in die Werthe der η eingesetzt werden. Dazu müssen die η ganz besondere Formen haben. Setzt man z. B.

$$(17.)\qquad \eta = \frac{p s_1 + s_2}{\sqrt{Ap^2 + 2Bp + C}},$$

so ergiebt die Bedingung

$$0 = \frac{\partial \eta}{\partial p}:$$

$$s_1(Ap^2 + 2Bp + C) = (ps_1 + s_2)(Ap + B)$$

oder

$$(17^a.) \qquad p = \frac{s_2 B - s_1 C}{s_1 B - s_2 A},$$

und setzt man diesen Werth von p in den Werth von η, so erhält man als Werth von h

$$(17^b.) \qquad h = \frac{\sqrt{C.s_1^2 - 2B.s_1.s_2 + A.s_2^2}}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Die Grösse h^2 ist also in der That eine Function, welche als ein Theil von $\mathfrak{L}$ eintreten kann. Der Werth von h könnte linear werden nur, wenn $AC = B^2$, und dann wird er unendlich, da, wie oben erörtert, lineare Functionen dieser Art nicht möglich sind.

Es ergiebt sich hier weiter

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_1} : \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_2} = (Cs_1 - Bs_2) : (As_2 - Bs_1)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_1} : \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_2} = p : 1.$$

Beide Verhältnisse sind aber gleich gemäss dem oben gegebenen Werthe von p.

Wenn weiter keine $\mathfrak{s}$ vorkommen und $B = 0$, entspricht dieses Beispiel dem Falle, wo zwei rotirende Axen mit constanten Trägheitsmomenten A und C durch Frictionsrollen auf einander wirken, aber eine veränderliche Neigung gegen einander haben. Die Neigung der Axen bestimmt dann das Verhältniss der Geschwindigkeiten p, aber die lebendige Kraft wird nur durch die Drehungsgeschwindigkeiten der Axen, nicht durch deren Winkel bestimmt.

Die Existenz solcher Functionen könnte sich aber noch mehr verstecken, wenn in dem eben gegebenen Beispiel dem Werthe der lebendigen Kraft noch das Quadrat des Ausdrucks, der Null werden muss:

$$(17^c.) \qquad 0 = P[p(s_1 B - s_2 A) + s_1 C - s_2 B]^2$$

multiplicirt mit P einer beliebigen Function der Coordinaten hinzugefügt würde. Dieser würde bei der vorausgesetzten Art der Fesselung aus allen Gleichungen, die zur Bestimmung der $\mathfrak{s}_{\mathfrak{u}}$ gebraucht werden, verschwinden, weil die hinzukommenden Glieder immer einen Null werdenden Factor haben.

Bestehen mehrere lineare homogene Functionen η_t, so würde eine jede homogene Function zweiten Grades aus denselben gebildet dem Werthe

der lebendigen Kraft hinzugefügt werden können, ohne die Werthe der $\mathfrak{s}_b$ zu verändern. Aber während in dem Falle der Gleichungen (17.) bis (17^b.) das in F eintretende p eine beliebige Function der p_a sein könnte, wird es in dem letzterwähnten Falle nur die Werthe haben können, die in den η vorkommen. Auch würde in diesem letzten Falle in der Regel die Elimination des p aus dem F wieder möglich werden, ohne eine Unbestimmtheit herbeizuführen, so lange der Coefficient P des Zusatzes (17^c.) zur lebendigen Kraft von Null verschieden wäre.

Denkt man sich den Coefficienten P als veränderlich, so sieht man, dass der unbestimmt bleibende Fall ein Grenzfall ist, der dem Durchgang des Werthes von P durch Null entspricht.

Derselbe unbestimmt bleibende Fall ist noch dadurch merkwürdig, dass er ein dicyklisches oder polycyklisches System darstellt, in dem, wie in einem monocyklischen die auf Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit in der Form

$$dQ = n\lambda . d(n.F)$$

dargestellt werden kann.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass das L solche Functionen enthielte, wie sie auch in der Normalform des F ohne Einmischung von p vorkommen könnten. Erst die zuletzt besprochenen Zusätze führten Functionen der $\mathfrak{s}_b$, die auch p enthalten, in das L ein.

Wir können aber auch den andern Fall haben, dass die Functionen η, welche p enthalten, sowohl im F wie im L vorkommen. Unter diesen sind diejenigen von besonderem Interesse, welche auf die Integrationsform der Gleichungen (15^d.) bis (15^g.) führen, bei welcher der Werth des resultirenden Moments durch eine beschränkte Anzahl der Variablen $\mathfrak{s}_b$ dargestellt werden kann. Es tritt dies ein, wenn eines oder einige der η_t die Form haben

$$\eta_t = \varphi_t + p_t . \chi_t,$$

woraus folgt, wie oben in (15^c.)

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial p_t} = \chi_t = 0.$$

Da es hier nur darauf ankommt, an einem Beispiel zu zeigen, wie ein solcher Fall behandelt werden kann, so setze ich voraus, dass nur ein

$\eta = \varphi + p.\chi$ vorhanden sei, welches linear nur zwei $\mathfrak{s}_b$ enthält, die beide sonst weder in L noch in F vorkommen. Dann sind die $(\mathfrak{B}-2)$ Gleichungen zu erfüllen:

$$(18.)\quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}},$$

ferner

$$(18^a.)\quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

$$(18^b.)\quad \chi = 0,$$

$$(18^c.)\quad F = C.$$

Diese Anzahl der Gleichungen ist gerade ausreichend.

Wenn wir nun statt F eine andere Function setzen:

$$(19.)\quad \mathfrak{F} = (1+\varepsilon p)F,$$

welche in F übergeht, wenn ε gleich Null wird, so ändern sich die obigen Gleichungen (18.), (18^a.) und (18^c.) in die folgenden:

$$(19^a.)\quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}} = \lambda.(1+\varepsilon p)\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}},$$

$$(19^b.)\quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = \lambda.(1+\varepsilon p)\frac{\partial F}{\partial \eta},$$

$$(19^c.)\quad F = \frac{C}{1+\varepsilon p}.$$

Die neuen Werthe der $\mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}$ werden also dieselben Functionen der p und des λ wie die alten, nur multiplicirt mit dem Factor $(1+\varepsilon p)$, und wenn wir sie in den Werth von F einsetzen, so wird dieser, da F homogen ersten Grades sein muss, eine Function der p multiplicirt mit $\lambda(1+\varepsilon p)$. Der Werth des hier vorkommenden λ, durch C ausgedrückt, wird also durch $(1+\varepsilon p)^2$, der Werth des $\mathfrak{s}_{\mathfrak{z}}$ und des η aber, in C ausgedrückt, durch $(1+\varepsilon p)$ dividirt sein. Wenn ε verschwindet, gehen alle diese Werthe in die früheren zurück.

Dagegen geht nun die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

über in

$$(19^d.)\quad \varepsilon.F + (1+\varepsilon p).\chi.\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0,$$

woraus folgt, dass χ nicht mehr strenge gleich Null, wohl aber mit ε zugleich sehr klein wird. Aus dieser Gleichung kann man nun aber den Werth von p bestimmen, und diesen Werth kann man anwenden, um p aus

dem Werthe von $\mathfrak{F}$ zu eliminiren. Da der so gefundene Werth von p nicht bloss die Function η, welche im F und $\frac{\partial F}{\partial \eta}$ steckt, enthält, sondern auch χ, welches die beiden in η enthaltenen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ ebenfalls enthält, so gehen diese auch in den Werth von $\mathfrak{F}$ über, während p aus diesem verschwindet, und es werden nun statt der einen Gleichung (19^b.) zwei verschiedene Gleichungen eintreten:

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} = \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}}$$

für zwei Indices $\mathfrak{h}$. Vorausgesetzt, dass η keine Function von χ ist, folgt aus diesen beiden:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} - \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \chi} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Function $\mathfrak{F}$, welche nach der Elimination des p nur noch die $\mathfrak{s}$ enthält, die Lösung vollständig bestimmt, welche Lösung für den Grenzfall $\epsilon = 0$ dieselben Werthe, wie die Gleichungen (18.) bis (18^c.) ergiebt*).

Ich möchte schliesslich noch darauf aufmerksam machen, dass man in der ganzen Behandlung dieser Aufgabe die Rolle der Grössen

$$U \quad s_\mathfrak{b} \quad \sigma \quad q_\mathfrak{b} \quad \lambda$$

mit den Grössen

$$-H \quad q_\mathfrak{b} \quad \lambda \quad s_\mathfrak{b} \quad \sigma$$

vertauschen kann und dieselben Systeme von Gleichungen erhält.

Drückt man die lebendige Kraft durch die $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$ aus, und verlangt, dass im gefesselten System die $q_\mathfrak{b}$ solche Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und des λ werden sollen, dass die Werthe der Kräfte $P_\mathfrak{a}$ dabei unverändert bleiben: so führt dies, wie oben, auf die Gleichungen

$$(17.) \qquad \Sigma\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right] = 0$$

---

*) Eine ähnliche Behandlungsweise kann man auch in den andern Fällen, wo die η die p in beliebiger Weise enthalten, einschlagen, indem man dem F Factoren $(1+\epsilon p)$ giebt, vorausgesetzt, dass die Werthe der p dabei auch von den Grössen $\frac{\partial \eta}{\partial p}$ abhängig werden, und dadurch genügend viel andere Functionen der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ in das $\mathfrak{F}$ hineinkommen neben den η, welche allein in L enthalten sind.

oder

$$(17.) \quad \Sigma_{\mathfrak{b}}\left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}\right] = 0.$$

Wird ferner:

$$dQ = \Sigma\,[q_{\mathfrak{b}} . ds_{\mathfrak{b}}] = \lambda . d\sigma,$$
$$2L = \Sigma_{\mathfrak{b}}[q_{\mathfrak{b}} . s_{\mathfrak{b}}] = \lambda . \sigma,$$

so folgt

$$\sigma . d\lambda = \Sigma[s_{\mathfrak{b}} . dq_{\mathfrak{b}}],$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (17.)

$$(17^a.) \quad \sigma = \Sigma\left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial \lambda}\right].$$

Die Gleichungen (17.) und (17^a.) führen wieder auf das allgemeine Integral:

$$(17^b.) \quad \lambda = F_q,$$

und

$$(17^c.) \quad s_{\mathfrak{b}} = \sigma \cdot \frac{\partial F}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{b}}}.$$

Hierin bezeichnet F eine homogene Function ersten Grades der $q_{\mathfrak{b}}$ allein. Das System der Gleichungen (17^c.) wird im Allgemeinen, wenn nicht L und F gleiche Functionen mehrerer $q_{\mathfrak{b}}$ enthalten, die $q_{\mathfrak{b}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ bestimmen lassen. Die Ausnahmen sind ganz ebenso zu behandeln wie in der früheren Methode, welche eine willkürliche Function der s benutzt.

Berlin, November, 1884.

Ueber den Zusammenhang der Werthe einer algebraischen Function.

(Von Herrn *C. Runge.*)

Für die Theorie der algebraischen Functionen einer complexen Veränderlichen ist die Lösung der folgenden Aufgabe von fundamentaler Bedeutung:

Wenn die Function u, welche der algebraischen Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügt, für $z = z'$ den Werth $u = u'$ besitzt, welchen Werth nimmt sie alsdann für $z = z''$ an, sobald z von z' bis z'' einen gegebenen Weg durchläuft? *).

Diese Aufgabe soll hier durch algebraische Mittel gelöst werden.

Um die Werthe von u, welche demselben Werthe von z entsprechen, von einander zu unterscheiden, sollen sie nach folgendem Principe bezeichnet werden.

Man ordne die Wurzeln nach der Grösse ihres reellen Theiles und bezeichne sie in dieser Reihenfolge mit

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n,$$

sodass der reelle Theil von u_λ nicht kleiner ist als der reelle Theil von $u_{\lambda-1}$.

Diese Bezeichnung ist nur dann eine schwankende, wenn zwei oder mehrere Wurzeln den gleichen reellen Theil besitzen. Untersuchen wir, für welche Werthe von z dies eintreten kann.

In einem solchen Falle ist die Differenz wenigstens zweier Wurzeln rein imaginär und mithin das Quadrat derselben negativ. Ich bezeichne das Quadrat der Differenz zweier Wurzeln mit ξ. ξ ist eine algebraische Function von z, welche einer Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}n(n-1)$ genügt

$$\prod_{\mu,\nu}(\xi-(u_\nu-u_\mu)^2) = G(\xi, z) = 0 \qquad \binom{\nu = 1, 2, \ldots n}{\mu = \nu+1, \ldots n}.$$

*) Vergl. *Puiseux*, *Liouvilles* J. Tome XV.

Die Werthe von z, für welche zwei oder mehrere Wurzeln den gleichen reellen Theil besitzen, ergeben sich aus der Gleichung

$$G(\xi, z) = 0,$$

wenn ich ξ den negativen Theil der reellen Axe von 0 bis ins Unendliche durchlaufen lasse.

Nun wäre es möglich, dass diese Gleichung eine von z unabhängige negative Wurzel besässe. Dann wäre unsere Bezeichnung ganz illusorisch. In diesem Falle führe man statt u die Grösse $u' = au$ ein, wo a eine sogleich näher zu bestimmende Constante ist. Für u' wird die Bezeichnung nach unserem Principe eine schwankende, wenn $a^2\xi$ negativ ist. Nun kann man aber a so wählen, dass die constanten Werthe von ξ, welche der Gleichung $G(\xi, z) = 0$ genügen, mit a^2 multiplicirt nicht negativ sind. Dann liefern also nur diejenigen Wurzeln ξ von $G(\xi, z) = 0$ die gesuchten Werthe von z, welche von z wirklich abhängen. Da die Lösung der gestellten Aufgabe für die Function u' auch den Zusammenhang der Werthe von u liefert, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass etwaige constante Wurzeln von $G(\xi, z) = 0$ nicht negativ sind. Beschreibt alsdann ξ den negativen Theil der reellen Axe, so durchläuft z eine Reihe von algebraischen Curvenzügen. Jedem Werthe von ξ entspricht nur eine endliche Anzahl von Werthen für z, die sich auf der complexen Kugel stetig mit ξ ändern.

Wenn nun der Weg, welchen z von z' bis z'' durchläuft, keinen jener Züge schneidet oder berührt, so kann man den Zusammenhang der Wurzeln sofort entscheiden. Es muss u'_α in u''_α übergehen. Denn gesetzt, es änderten $u_1, u_2, \ldots u_n$ unterwegs ihre Reihenfolge, so müssten entweder zwei dieser Grössen denselben reellen Theil erhalten, oder wenigstens eine müsste unendlich werden. Es läge also auf dem Wege ein Werth von z, für welchen ξ negativ oder unendlich ist.

Solche Werthe von z liegen aber auf den oben genannten Curvenzügen, und der Weg müsste diese treffen, was wider die Voraussetzung ist.

Es bleibt zu untersuchen, welcher Zusammenhang unter den Wurzeln stattfindet, wenn der Weg einen der Curvenzüge überschreitet.

Dies geschehe im Punkte z_0. Hier werden die reellen Theile einer Anzahl der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ einander gleich oder unendlich. Es mögen die reellen Theile von $u_\alpha, u_{\alpha+1}, \ldots u_{\alpha+\beta}$ einander gleich werden, dagegen die reellen Theile aller übrigen von diesen verschieden sein. Dann

werden die Grössen $u_{\alpha+1}-u_\alpha$, $u_{\alpha+2}-u_{\alpha+1}$, ... $u_{\alpha+\beta}-u_{\alpha+\beta-1}$ für $z = z_0$ rein imaginär, während sie für Werthe von z vor z_0 im reellen Theil sämmtlich positiv sind. Ich nehme dabei an, dass z_0 ein solcher Punkt sei, in dem ξ weder Null noch unendlich wird und in dessen Umgebung diejenigen Werthe von ξ, welche dort negativ sind, sich in Potenzreihen von $z-z_0$ entwickeln lassen, in welchen der Coefficient der ersten Potenz von $z-z_0$ nicht verschwindet. Offenbar ist nur eine endliche Anzahl von Punkten auf den Curvenzügen vorhanden, welche eine von diesen Bedingungen nicht erfüllen.

Da ich nun den Weg zwischen z' und z'' ein wenig variiren kann, ohne den Zusammenhang der Wurzeln zu ändern, so lassen jene kritischen Punkte für z_0 sich vermeiden. Der Weg liesse sich nur in dem Falle nicht variiren, wenn er durch einen Verzweigungspunkt liefe, aber dann ist der Zusammenhang auch unbestimmt.

Dieses vorausgesetzt, lassen auch

$$u_{\alpha+1}-u_\alpha, \quad \ldots \quad u_{\alpha+\beta}-u_{\alpha+\beta-1}$$

sich nach Potenzen von $z-z_0$ entwickeln, und der Coefficient der ersten Potenz von $z-z_0$ wird von Null verschieden sein.

Nun werde z_0 in einen kleinen Kreis eingehüllt, innerhalb dessen dieselben Bedingungen erfüllt sind, so entsprechen denselben kleine einfach zusammenhängende Flächentheilchen im Gebiete der Grössen

$$u_{\alpha+1}-u_\alpha, \quad \ldots \quad u_{\alpha+\beta}-u_{\alpha+\beta-1},$$

welche durch die rein imaginäre Axe in je zwei Theile getrennt werden. Den Theilen der rein imaginären Axe in diesen Flächenstücken entsprechen in dem Kreise um z_0 mehrere durch z_0 laufende Züge, welche auch zusammenfallen können. Jeder derselben theilt den Kreis in zwei Theile, und jedem dieser Theile entspricht im Gebiete der Grössen $u_{\alpha+1}-u_\alpha$, ... $u_{\alpha+\beta}-u_{\alpha+\beta-1}$ einer der durch die rein imaginäre Axe von einander getrennten Theile.

Wenn nun der Weg in z_0 die sämmtlichen dort sich kreuzenden Züge überschreitet, so wird jede der Grössen

$$u_{\alpha+1}-u_\alpha, \quad \ldots \quad u_{\alpha+\beta}-u_{\alpha+\beta-1}$$

die imaginäre Axe überschreiten. Für die Werthe von z, welche auf z_0 folgen, wird also der reelle Theil aller dieser Grössen negativ sein.

Der Index derjenigen Wurzel, in welche u_α übergeht, wird also grösser sein als der Index derjenigen Wurzel, in welche $u_{\alpha+1}$ übergeht u. s. f.

Daraus folgt, dass

$$u_\alpha, \quad u_{\alpha+1}, \quad \dots \quad u_{\alpha+\beta}$$

übergehen in

$$u_{\alpha+\beta}, \quad u_{\alpha+\beta-1}, \quad \dots \quad u_\alpha.$$

Im Allgemeinen werden längs eines Zuges die reellen Theile von nicht mehr als zwei Wurzeln einander gleich. Dann entspricht dem Ueberschreiten dieses Zuges eine Vertauschung von zwei Indices.

Es können aber auch längs desselben Zuges die reellen Theile von mehr als zwei Wurzeln einander gleich werden, oder es können die Wurzeln sich in Gruppen ordnen

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots \quad u_r; \quad u_{r+1}, \quad u_{r+2}, \quad \dots \quad u_{r+s}; \quad \dots$$

von der Art, dass zwei Wurzeln derselben Gruppe gleiche reelle Theile, dagegen zwei Wurzeln verschiedener Gruppen verschiedene reelle Theile besitzen. Alsdann kehrt sich beim Ueberschreiten des Zuges innerhalb der einzelnen Gruppen die Reihenfolge der Wurzeln um. Dem Zuge entspricht die Substitution

$$\begin{pmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & \dots & u_r, & u_{r+1}, & \dots & u_{r+s}, & \dots \\ u_r, & u_{r-1}, & u_{r-2}, & \dots & u_1, & u_{r+s}, & \dots & u_{r+1}, & \dots \end{pmatrix}.$$

Irgend einem Curventheil, der keinen andern trifft und keinen Verzweigungspunkt enthält, kann nur eine einzige Substitution entsprechen. Denn denken wir uns einen ihn kreuzenden Weg, so können wir denselben variiren, ohne den Zusammenhang der Wurzeln zu ändern und also den Schnittpunkt an dem Curvenzug entlang verschieben.

Nun ist die Frage nach dem Zusammenhange der Wurzeln für die Endpunkte eines vorgelegten Weges auf das Einfachste zu entscheiden. Man braucht nur die Schnittpunkte des Weges mit jenen Curvenzügen zu beachten und nach der Reihe die Substitutionen der Indices, welche ihnen entsprechen, zusammenzusetzen. Es ergiebt sich alsdann eine Substitution

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Diese stellt den Zusammenhang der Wurzeln dar, indem $u_1, u_2, \dots u_n$ übergehen in $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \dots u_{\alpha_n}$.

Beispiele. Für die Gleichung

$$u^3+\varphi(z)u+\psi(z) = 0$$

ist

$$G(\xi, z) = \xi^3+6\varphi\xi^2+9\varphi^2\xi+4\varphi^3+27\psi^2.$$

Also insbesondere für

$$u^3-u+z = 0\text{*)}$$

$$\xi^3-6\xi^2+9\xi-4+27z^2 = 0.$$

Lassen wir ξ den negativen Theil der reellen Axe durchlaufen, so erhalten wir für z die beiden Züge $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ bis $+\infty$ und $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ bis $-\infty$.

Für $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (die Quadratwurzel positiv genommen) sind zwei Wurzeln gleich $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ und eine gleich $-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot$ Mithin entspricht dem positiven Zuge die Substitution (23). Für $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ sind zwei Wurzeln gleich $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ und eine Wurzel gleich $+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot$ Dem negativen Zuge entspricht also die Substitution (12). Hiermit sind alle Fragen über den Zusammenhang der Wurzeln dieser Gleichung entschieden.

Für

$$u^3-u+\psi(z) = 0$$

ist

$$G(\xi, z) = \xi^3-6\xi^2+9\xi-4+27\psi(z)^2.$$

Für $\xi = 0$ bis $-\infty$ durchläuft $\psi(z)^2$ die Werthe $\frac{4}{27}$ bis $+\infty$ also $\psi(z) = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ bis $+\infty$ und $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ bis $-\infty$.

Sei

$$z = x+yi, \quad \psi(z) = R(xy)+R_1(xy)i.$$

Soll $\psi(z)$ reell sein, so muss $R_1(xy)$ verschwinden. Die gesuchten Curvenzüge sind also Theile der reellen Züge der Curve

$$R_1(xy) = 0.$$

Wenn man den Verlauf derselben kennt, so ist der Zusammenhang der Wurzeln jener Gleichung unmittelbar gegeben. Für einen vorgelegten Weg braucht man nur die Durchschnittspunkte mit $R_1(xy) = 0$ mit der Annäherung zu berechnen, dass sich entscheiden lässt, welche Wurzeln daselbst im reellen Theil übereinstimmen. Für die positiven Werthe von $\psi(z)-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

*) Ein Beispiel, welches ich behandle, weil es auch bei *Puiseux* vorkommt.

erhalten u_2 und u_3 den gleichen reellen Theil, für die negativen Werthe von $\psi(z)+\frac{2}{3\sqrt{3}}$, u_1 und u_2. —

$$u^3-\varphi(z)u+\psi(z) = 0.$$

Man kann die Untersuchung auf den vorigen Fall zurückführen, indem man setzt

$$u = \sqrt{\varphi(z)}u'.$$

Dann erhält die Gleichung für u' die Form

$$u'^3-u'+\psi(z)\varphi(z)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Kennt man den Zusammenhang der Grössen u' für die Endpunkte eines Weges und weiss, in welchen Werth $\sqrt{\varphi(z)}$ übergeht, was mit Hülfe derselben Methode angewandt auf die Gleichung $u^2-\varphi(z)=0$ entschieden wird, so ist auch der Zusammenhang der Wurzeln von $u^3-\varphi.u+\psi=0$ bekannt.

Z. B.

$$u^3-\frac{3}{z}u+2z = 0.$$

Ich setze

$$u = \frac{u'}{\sqrt{z}};$$

dann resultirt

$$u'^3-3u'+2z^{\frac{5}{2}} = 0.$$

Die Unterscheidung der beiden Werthe von $\sqrt{z}$ nach ihrem reellen Theile wird nur für negative Werthe von z illusorisch. Ich nenne denjenigen mit negativem reellem Theile den ersten, denjenigen mit positivem reellem Theile den zweiten Werth.

Die Unterscheidung der Wurzeln u' nach ihrem reellen Theile wird illusorisch für positive Werthe von

$$z^5-1$$

und zwar vertauschen sich u'_2 und u'_3, wenn $z^{\frac{5}{2}}$ positiv ist, und u'_1 und u'_2, wenn $z^{\frac{5}{2}}$ negativ ist.

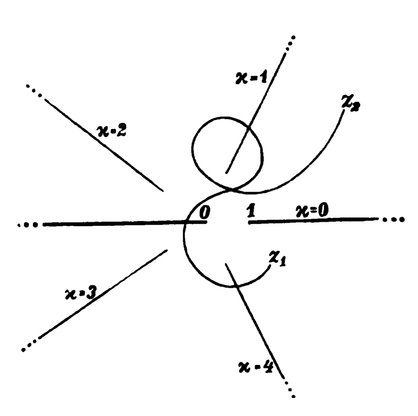
z^5-1 ist positiv auf den fünf Geraden

$$z = \varrho e^{\frac{2\varkappa\pi i}{5}} \qquad \left(\begin{matrix}\varrho = 1 \text{ bis } +\infty \\ \varkappa = 0, 1, \ldots 4\end{matrix}\right).$$

Für den ersten Werth von $\sqrt{z}$ ist $(\sqrt{z})^5$ auf den Linien $\varkappa = 0, 2, 3$ negativ, dagegen auf den Linien $\varkappa = 1, 4$ positiv. Es vertauschen sich also für den ersten Werth von $\sqrt{z}$ auf den Linien $\varkappa = 0, 2, 3$ die Wurzeln u'_1 und u'_2,

auf den Linien $x = 1$, 4 die Wurzeln u'_2 und u'_3. Für den zweiten Werth von $\sqrt{z}$ umgekehrt.

Seien in z_1 (siehe die Figur) $u'_1 u'_2 u'_3$ die dem ersten Werthe von $\sqrt{z}$ entsprechenden Wurzeln. Auf dem gezeichneten Wege vertauschen sich zunächst u'_2 und u'_3 beim Ueberschreiten der Linie $x = 4$. Dann geht $\sqrt{z}$ in seinen zweiten Werth über beim Ueberschreiten des negativen Theils der reellen Axe. Beim Ueberschreiten der Linie $x = 1$ vertauschen sich alsdann u'_1 und u'_2, da jetzt $\sqrt{z}$ seinen zweiten Werth hat. Bezeichnen wir mit $u''_1 u''_2 u''_3$ die dem Werthe z_2 und dem zweiten Werthe von $\sqrt{z_2}$ entsprechenden Wurzeln, so gehen also auf dem gezeichneten Wege $u'_1 u'_2 u'_3$ in $u''_2 u''_3 u''_1$ über und zugleich der erste Werth von $\sqrt{z}$ in den zweiten. — Man könnte auch direct für



$$u^3 - \frac{3}{z} u + 2z = 0$$

die Gleichung $G(\xi, z)$ aufstellen

$$\xi^3 - \frac{18}{z} \xi^2 + \frac{81}{z^2} \xi - \frac{4.27}{z^3} + 4.27 z^2 = 0.$$

Aber es ist nicht leicht, sich hier von dem Verlauf der Curvenzüge ein Bild zu machen. —

Es lässt sich indessen einiges Allgemeine darüber sagen.

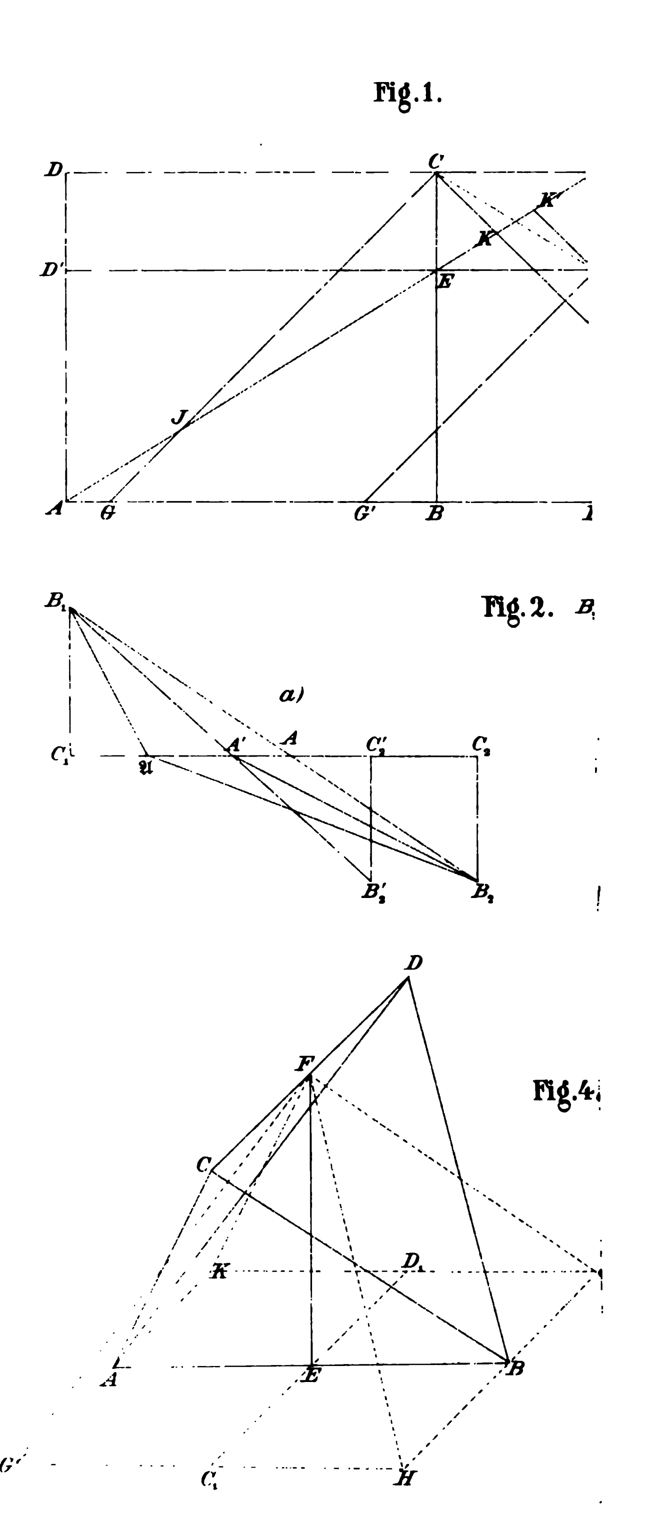
Für $\xi = 0$ sind zwei Wurzeln einander gleich, es liegt also z in den Discriminantenpunkten. Die Züge gehen mithin von den Discriminantenpunkten aus. Ist a eine α-fache Wurzel von $\Pi(u_\lambda - u_\mu)^2$, so liegen für kleine Werthe von ξ in der Nähe von a α verschiedene Werthe von z. Es entspringen also von a α Curvenzüge, welche auch zusammenfallen können. Die Curvenzüge mit ihren zugehörigen Substitutionen charakterisiren den Zusammenhang beim Umkreisen des Punktes a.

Ist a eine einfache Nullstelle von $\Pi(u_\lambda - u_\mu)^2$, so kann aus a nur ein Curvenzug entspringen, und zwar entspricht jedem Punkte desselben nur ein Werth von ξ, also nur ein Wurzelpaar. Bei Umkreisung des Punktes überschreitet man den Zug nothwendig entweder ein Mal oder eine ungerade Anzahl von Malen. Die beiden Wurzeln vertauschen sich also dabei. Eine

einfache Wurzel der Discriminante ist daher immer ein Verzweigungspunkt. Ist a eine doppelte Nullstelle von $\Pi(u_\lambda - u_\mu)^2$, so entspringen in a zwei Züge. Nun sind zwei Fälle möglich, entweder die beiden Züge gehören zu demselben Wurzelpaar oder zu verschiedenen. Im ersteren Falle tragen sie dieselbe Substitution und eine Umkreisung lässt die beiden Wurzeln mithin ungeändert, a ist alsdann ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Im zweiten Falle ist eine Verzweigung vorhanden. Die Gleichung $G(\xi, z) = 0$ kann also dazu dienen, die Art der singulären Punkte zu erkennen, und zwar ist dafür nur nöthig, die Ansätze der Curvenzüge für kleine Werthe von ξ und ihre zugehörigen Substitutionen zu kennen.

Berlin, im Mai 1884.

1-4 zu Sturm: Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minin
5 zu Study: Abbildung des Kreisringes auf ein Rechteck.



einf
Ist
Nun
selb
selb
geän
ist
dien
nöth
geh

Jou

STORAGE

